

修士論文

原始ブラックホールと
宇宙マイクロ波背景放射の異方性

名古屋大学 理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻

宇宙論研究室 (C 研)
261801021 阿部克哉

概要

銀河中の星の動きや大規模構造分布、そして宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background: CMB) の温度非等方性など、数多くの天文学的観測から暗黒物質 (Dark Matter: DM) の存在が示唆されている。しかしながら、DM は重力相互作用を通してしか存在を確認できていないため、観測から得られる情報は非常に限られている。そのため、DM の様々な理論的モデルが今まで考案されてきた。それらの DM モデルの 1 つに原始ブラックホール (Primordial Black Hole: PBH) と呼ばれる天体がある。PBH とは、宇宙初期にて高密度領域が重力崩壊して形成されるブラックホールである。上記の通り、PBH の存在量を調べることは DM の調査に直接つながる。それゆえ、現在様々な手法を用いてその存在量に制限を与える取り組みがなされている。

本研究の目的は、熱的スニヤエフ・ゼルドビッチ効果 (thermal Sunyaev-Zel'dovich effect: 熱的 SZ 効果) 及び運動的 SZ 効果と呼ばれる現象の観測により、PBH の存在量について調査を行うことである。熱的 SZ 効果とは、CMB 光子が高温プラズマを通過する際に高温電子との逆コンプトン散乱が生じ、CMB 温度ゆらぎが生成される現象のことである。また運動的 SZ 効果とは、このプラズマが CMB 光子に対して相対速度をもっていた場合のドップラー効果により CMB 温度ゆらぎが生成される現象のことである。PBH ごく近傍のガスは、PBH に降着する際に重力エネルギーを解放し非常に高温になるため、X 線や紫外線を放出する。その結果、PBH 周辺 ($\sim 1\text{pc}$) のガスは電離・加熱され高温プラズマとなる。さらに、これらのガスは線形理論に基づくバルク速度を持っている。それゆえ、PBH は熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果を生じさせるのである。

上記の目的達成のために、PBH の数密度等の空間分布を仮定することで、これら 2 つの SZ 効果により生じる CMB 温度ゆらぎの非等方性への影響を見積もった。そして、この非等方性の理論予測と南極点望遠鏡の観測データを比較することで、PBH の存在量に対する調査を行った。その際、計算精度向上のため、エネルギー保存の式と輻射輸送方程式を同時に解く数値計算コードを開発し、PBH 周辺のガス温度と電離度をより正確に見積もった。

その結果、これらの SZ 効果による CMB 温度ゆらぎの角度パワースペクトルが小角度スケールにおいて平らな形状をもつこと、さらに $\ell \geq 2000$ において、主要な CMB 温度ゆらぎの角度パワースペクトル成分になり得ることがわかった。これゆえ、将来のより小さな角度スケールにおける平らな CMB 温度角度パワースペクトルの検出・非検出は PBH の有無を説明する有益な情報になりうるであろう。

目次

| | | |
|-----------|---|----|
| 第 1 章 | Introduction | 5 |
| 第 2 章 | Standard Cosmology | 8 |
| 2.1 | Expanding Universe | 8 |
| 2.2 | FLRW Metric | 9 |
| 2.3 | Einstein Equation | 11 |
| 2.4 | Friedmann Equation | 13 |
| 2.5 | The Hubble Law and distance of the Universe | 15 |
| 2.6 | Dark Matter | 19 |
| 2.7 | Evolution History of the Universe | 21 |
| 第 3 章 | Primordial black hole | 25 |
| 3.1 | Introduction for PBH | 25 |
| 3.2 | PBH formation | 26 |
| 3.3 | Scale of the perturbation forming PBHs | 29 |
| 3.4 | PBH abundance | 30 |
| 3.5 | Extended mass function | 32 |
| 3.6 | PBH abundance constraint | 33 |
| 3.6.1 | Observation constraints on PBHs | 33 |
| 3.6.2 | Gravitational lensing | 35 |
| 3.6.3 | Microlensing | 37 |
| 3.6.4 | Millilensing | 39 |
| 3.6.5 | Femtolensing | 39 |
| 3.6.6 | Dynamical constraints | 40 |
| 3.6.6.I | Disruption of white dwarfs | 40 |
| 3.6.6.II | Disruption of neutron stars | 41 |
| 3.6.6.III | Disruption of wide halo binaries | 41 |
| 3.6.6.IV | Disruption of globular clusters | 43 |
| 3.6.6.V | Disruption of ultra-faint dwarf galaxies | 43 |

| | | |
|--------------|---|-----------|
| | 3.6.6.VI Dynamical friction on PBHs | 44 |
| | 3.6.6.VII Disk heating | 46 |
| 3.6.7 | Accretion constraints | 46 |
| | 3.6.7.I Accretion effects on CMB | 47 |
| | 3.6.7.II X-rays and radio from the present-day PBHs | 51 |
| 3.6.8 | Indirect constraints | 52 |
| | 3.6.8.I 2nd order gravitational waves from the primordial density perturbation | 53 |
| | 3.6.8.II CMB spectral distortions from the primordial density pertur- bation | 56 |
| | 3.6.8.III Big-bang nucleosynthesis | 57 |
| 3.6.9 | Future constraints | 58 |
| 第 4 章 | The Cosmic Microwave Background | 60 |
| 4.1 | The history of Cosmic Microwave Background | 60 |
| 4.2 | Measurements of the CMB | 61 |
| 4.3 | COBE result: almost perfect black-body | 61 |
| 4.4 | COBE results: discovery of anisotropy | 61 |
| 4.5 | Subsequent observations of CMB | 62 |
| 4.6 | Sunyaev-Zel'dovich effect | 63 |
| 第 5 章 | Thermal & Kinetic Sunyaev-Zel'dovich effect | 65 |
| 5.1 | Thermal SZ effect | 65 |
| 5.2 | Kinetic SZ effect | 69 |
| 第 6 章 | Sunyaev-Zel'dovich anisotropy induced by Primordial black holes | 71 |
| 6.1 | Purpose and method of my research | 71 |
| | 6.1.1 The luminosity from a PBH | 72 |
| | 6.1.2 IGM temperature and ionization profiles around a PBH | 73 |
| | 6.1.3 Thermal SZ & kinetic SZ effect due to a PBH | 75 |
| | 6.1.4 Thermal SZ & Kinetic SZ anisotropy due to PBHs | 77 |
| 6.2 | Results of my research | 82 |
| | 6.2.1 Results about thermal SZ effect induced by PBHs | 82 |
| | 6.2.2 Results about kinetic SZ effect induced by PBHs | 84 |
| | 6.2.3 The abundance constraint of PBH from this research | 86 |
| 第 7 章 | Conclusion | 88 |

| | |
|--|-----|
| Acknowledge | 90 |
| References | 91 |
| Appendix | 103 |
| 付録 A: Halo Formalism | 103 |
| The two-point correlation function (density) | 103 |
| The two-point correlation function (ionization fraction) | 105 |
| 付録 B: Astrophysics | 107 |
| Cooling rate | 107 |
| Stömgren radius | 107 |
| 付録 C: Jeans instability | 109 |
| 付録 D: Bessel function & Spherical Bessel function | 113 |
| Bessel fuction | 113 |
| Spherical Bessel fuction | 113 |
| 付録 E: Others | 114 |
| Christoffel symbols | 114 |
| Stress Energy Tensor | 115 |

第 1 章

Introduction

2019 年, 宇宙論物理学者の James Peebles がノーベル物理学賞を受賞した. これは, 宇宙論を学ぶ身として非常に嬉しいことである. Peebles は, 「我々の宇宙の豊かな構造はどのようにしてつくられたのか?」という問題に対して現代物理学を駆使して明らかにしていくという物理学的宇宙論の礎を築いた. 彼のノーベル賞受賞に大きく関わる研究として, 宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background: CMB) の研究が挙げられる. CMB とは, 宇宙誕生からおよそ 38 万年後 (宇宙の晴れ上がり) の宇宙におけるビッグバン宇宙の残光であり, 天球上の全方向からほぼ等方的にやってくるマイクロ波である. Peebles は CMB の発見以前から CMB の重要性を唱え, CMB が存在した場合に宇宙の歴史に対してどのようなことが言えるのかを物理学の立場から明らかにしていた. そして実際, 1964 年に Penzias と Wilson により CMB が発見されたのである. 後の研究・観測により, CMB のスペクトルが温度 2.725K の黒体放射スペクトルにほとんど一致していること, しかしおよそ $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ のオーダーで CMB 温度ゆらぎが存在することがわかった. このゆらぎは発見当時すでに予言されていたものであった. というのも, 我々の宇宙には銀河をはじめとして, 銀河団や大規模構造などの非一様な構造が広がっている. そのような構造は, 初期に存在していた密度ゆらぎが種になり, それが重力によって成長することで形成されたものだと考えられている. そのため, ビッグバン宇宙論の枠組みの中でそのような構造を作ろうと思うと, 宇宙の晴れ上がり時に種となる CMB 温度の非一様成分が存在していなければならないのである. 実際, 1967 年に Sachs & Wolfe によって宇宙の晴れ上がり時における重力ポテンシャルが CMB に温度ゆらぎを生成することを示しており, これはザックス-ヴォルフェ効果と呼ばれている. また, 線形理論を用いて光子・バリオン系のボルツマン方程式を解くことで, 標準宇宙論を基礎とする他の CMB ゆらぎ生成機構に関しても定量的に理解されている. このような CMB に関する理論体系と CMB 及び CMB ゆらぎの観測を通じて我々は, 直接見ることができない宇宙の真の姿を教えてもらっているのである. 宇宙論において CMB が今まで果たしてきた役割の大きさは計り知れない.

標準宇宙論の枠組みにおいて, 銀河中の星の動きや大規模構造分布, そして CMB 温度の非等方性など, 数多くの天文学的観測から暗黒物質 (Dark Matter: DM) と呼ばれる未知の物質の存在が示唆されている. しかしながら, DM は重力相互作用を通してしか存在を確認できていない

ため、観測から得られる情報は非常に限られている。そのため、DM の様々な理論的モデルが今まで考案されてきた。一般的には、DM 候補は大きく分けて 2 つのタイプに分けることができる。1 つ目は非バリオン粒子タイプ、2 つ目は天文学的なコンパクト天体タイプである。1 つ目の非バリオン粒子タイプのモデルは、beyond Standard Model から数多く予言されており例えば、Weakly interacting massive particles (WIMP) [1] や Axion [2, 3, 4, 5], さらに Axionlike particles [6] 等が挙げられる。一方、後者のタイプに関しては原始ブラックホール (Primordial Black Hole: PBH) と呼ばれる天体 [7] が可能性の高いモデルとして考えられている。PBH とは、宇宙初期にて高密度領域が重力崩壊して形成されるブラックホールである。(詳しくは第 3 章を参照せよ。) PBH を研究する動機が、DM の候補であるからだけではないのが PBH の興味深い点である。例えば、近年の重力波イベントの発見も PBH を研究する追い風になっている。重力波解析によると、観測された重力波のいくつかは、質量が $20 - 100M_{\odot}$ 程度の 2 つのブラックホールから形成されるバイナリー合体がソースになっている。標準的な銀河環境下においてこのような重たいブラックホールを星経路で形成することが難しいことがわかっている [8]。このため、重力波イベントを説明する新たな可能性として、PBH 合体による重力波が考えられるようになった。このような理由から、近年様々な手法を用いて PBH の存在量を調査する研究が盛んに行われている。

私の研究 [9] は、上記のような PBH の存在量を調査する研究の 1 つである。ただし、PBH の存在量を調査する手法として小角度スケールの CMB 温度ゆらぎの非等方性観測を用いたという点で新しい研究になっている。詳しくは第 6 章を参照してほしい。

本修士論文における目的は、私が博士前期課程の 2 年間で手がけてきたオリジナルの研究 [9] の成果を関連分野のレビューを踏まえながらまとめることである。この研究では、PBH へのガス降着により生じる熱的スニヤエフ-ゼルドビッチ効果 (thermal Sunyaev-Zel'dovich effect: 熱的 SZ 効果) と運動的 SZ 効果を見積もり、その結果を用いて CMB 温度ゆらぎの角度パワースペクトルを計算することで、PBH がこれらの機構を通して小角度スケールの CMB 温度ゆらぎに対して与える影響を調査した。そこでまず第 2 章にて、標準宇宙論モデルを一般相対性理論の発見から紹介し、その中で DM について紹介する。第 3 章では、DM の候補の 1 つである PBH について、研究動機、形成過程、そして存在量制限に関してまとめる。特に PBH の存在量制限に関しては、今現在非常に様々な手法が存在しており今後も増えていくであろう。それゆえ、3.6 節では現在確立している手法に関してなるべく網羅的にまとめてある。第 4 章では、CMB に関して、その発見の歴史から紹介する。続いて第 5 章では、熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果について説明する。これらは私の研究に直接関わる CMB 温度ゆらぎの生成機構である。第 6 章では、私が行った研究の目的と手法、そして得られた結果とそこから考察できることを説明し、その後第 7 章にてこの修士論文のまとめを述べる。Appendix には、本研究に用いた”halo formalism”, ガス冷却率、ストロムグレン半径、Jeans 長、ベッセル関数及び球ベッセル関数、クリストフェル記号、そしてエネルギー運動量テンソルに関してまとめてある。

本論文では、基本的に注釈がない場合、自然単位系を採用している。自然単位系とは、物理的な次元を持つ普遍的な定数である、真空中の光速 c , 換算プランク定数 \hbar , ボルツマン定数 k_B を長

さ，質量，時間の3つの基本単位のうち任意の2つと，温度の単位を適切に選ぶことにより

$$c = \hbar = k_B = 1$$

となるようにした単位系のことである。

第 2 章

Standard Cosmology

この章では、2019 年現在における標準的な宇宙論と DM の重要性について説明する。我々の宇宙の進化は、現在のところ標準宇宙論もしくはビッグバン宇宙と呼ばれる宇宙論モデルによって非常によく記述されている。このモデルは今からおよそ 100 年前、1916 年に Albert Einstein によって出版された一般相対性理論をもとにしている [10]。宇宙論は、宇宙原理 (Cosmological Principal) と呼ばれる、”宇宙が大きなスケールにおいて一様等方的である”ことと、重力作用のもとでの物理系の進化を記述するアインシュタイン方程式が成り立つことを大原則にしている。

2.1 Expanding Universe

宇宙の進化において非常に重要な事実、宇宙が膨張しているということである。つまり、昔の時代における我々とある銀河の距離は、現在のそれよりも短いのである。この膨張の振る舞いは、現在の値を $a_0 = a(t_0) = 1$ に規格化した、スケール因子 $a = a(t)$ と呼ばれる因子によって記述される。つまり、 $a(t < t_0) < 1$ である。このスケール因子を用いて我々は、物理的な距離を共動距離に取り直すことができる。共動距離とは、スケール因子を単位としたものさしで計った距離である。膨張宇宙において、2つの点が静止していたとすると、2点の物理的な距離は離れていくことになるが、2点の共動距離は一定のままである。共動距離は、共動座標における2点間の距離を測定するために使われる。共動座標とは、宇宙の膨張に沿って伸び縮みするものさしに乗っている静止した観測者の基準座標である。例えば繰り返しになるが、共動座標において座標が一定であるということは、物理的な座標においてはスケール因子 a が大きくなっていることを意味している。

宇宙を記述するためには時空の幾何学も導入しなければいけない。宇宙は、平坦・開いている・閉じている場合の3つの可能性がある。平坦宇宙の場合は、ユークリッド空間であり、2つの粒子が平行に動き出したらそれらの粒子はずっと平行に飛び続ける。かたや開いた宇宙の場合、それらの粒子は双曲線のように分岐して離れていく。閉じた宇宙の場合は、収束していく。曲率の言葉で表すなら、平坦、開いた、閉じた宇宙はそれぞれヌル、負、正の曲率を持っている。一般相対性理論においては、時空の幾何学的な特性はエネルギーと関係している。エネルギー密度が臨界密度に等しい時、宇宙は平坦であり曲率がヌルであるといえる。先述の通り、観測では我々の住んでいる

宇宙は平坦、もしくは極端に平坦に近い宇宙であることがわかっている。

一般相対論の文脈では、宇宙の歴史はスケール因子 $a(t)$ の時間進化によって記述される。ハッブルパラメータ $H(t)$ はスケール因子の時間依存性を表すパラメータであり、

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.1,1)$$

と定義される。ここで、ドットは宇宙時間での微分を意味し、 $\dot{a} = da/dt$ である。現在のハッブルパラメータ $H_0 = H(t_0)$ は、しばしばハッブル定数と呼ばれ、これを測定することは色々な理由で有益である。詳しくは、2.4 節にて説明するが、そのうちの 1 つを以下で説明しておこう。

共動座標にて静止している 2 人の観測者を考えよう。彼らは一般静止座標系でみれば、お互いにスケール因子の進化に従ってとある速度で動いている。近傍宇宙では、2 人の観測者間の相対的な後退速度 v と彼らの間の距離 d はハッブルの法則によって結びついている。

$$v = H_0 d, \quad (2.1,2)$$

ここで、 H_0 はおよそ $70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ であることが観測からわかっている。もしくは、無次元ハッブル定数 $h \equiv H_0 / (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ を用いて、 $h \simeq 0.7$ であると書く場合もある。

2.2 FLRW Metric

宇宙原理に基づく、宇宙の最も重要な特徴は、一様等方であることだ。宇宙の銀河分布の観測と CMB の観測はともに、100Mpc より大きなスケールにて宇宙原理が妥当であることを示唆している。つまり、このような大スケールにおいては宇宙はどの点を見ても、どの方向を観測しても統計的には同じように見えるのである。これらの特徴は、座標点のシフトや回転のもとでの不変を表していることと一致している。一方で、小スケールにおいては宇宙の非一様性が高く、宇宙原理は成り立たない。そのため、背景宇宙とは別に、背景宇宙でのゆらぎを導入する必要がある。背景宇宙の進化は宇宙の一般的な振る舞いを与えるため重要である傍、宇宙の大規模構造を生成するためには、背景宇宙からのゆらぎの成長が非常に重要である。

宇宙の一様性と等方性を課すということは、時空の計量が座標に依存しない計量であることを意味している。時間成分を $x^0 = t$ 、3 次元空間成分を x^i とする座標 $x^\mu = (x^0, x^i)$ によって記述される時空の基準座標系では、2 点間の距離を以下のように定義することができる:

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2,1)$$

ここで、 ds^2 は dx^μ で離れた 2 点間の距離の二乗であり、 $g_{\mu\nu}$ は時空の幾何学的な特性を表す計量である。さらに、アインシュタインの和の法則：同じ添字が上下セットで出てきた場合は縮約を取る法則、を用いている。計量 $g_{\mu\nu}$ は 4×4 の対称テンソルであり、4 つの対角成分と 6 つの非対角成分、合わせて 10 個の独立な成分を持っている。一様等方膨張宇宙の計量は、Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker: FLRW 計量と呼ばれる。局所的な観測者を考える場合、一般相対論は特殊相対論に近似でき、計量 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ であるミンコフスキー時空に

よって記述される*1. FLRW 計量 $g_{\mu\nu}$ は、局所的な場合に限り $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ と近似することができる。宇宙の等方性より、6つの非対角成分のうち $\mu \neq \nu$ である成分は消えることが予想される。さらに宇宙の一様性により、 $g_{\mu\nu}$ のすべての成分は空間座標によっていないことが予想される。よって、平坦宇宙での FLRW 計量は以下のように記述される。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (2.2,2)$$

そして式 (2.2,1) は、

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.2,3)$$

と書き直される。ここで、 δ_{ij} はユークリッド空間におけるクロネッカーのデルタである：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \quad (2.2,4)$$

開いた宇宙や閉じた宇宙を記述するためには、空間座標に対して球面座標系を用い、さらに時空の曲率を表す新しいパラメータ k を導入すると便利である。この場合の距離 ds^2 は以下のように書き下すことができる：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\}, \quad (2.2,5)$$

ここで、 (r, θ, ϕ) は一般的な球面座標である。曲率 $k = 0$ の場合は平坦宇宙、 $k = +1$ の場合は閉じた宇宙、 $k = -1$ の場合は開いた宇宙である。

計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられると、時空における粒子の自由な運動を記述することができる。その際、式 (E,11) で定義される、添字 μ と ν の対称性のもとでのクリストフェル記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ を考えることが必要不可欠である。クリストフェル記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は式 (E,11) より以下のように与えられる。

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho, \nu} + g_{\rho\nu, \mu}), \quad (2.2,6)$$

ここで $g_{\mu\rho, \nu} = \partial g_{\mu\rho} / \partial x^\nu$ という微分記法を用いている。クリストフェル記号は、座標変換の下でテンソルとは異なる変換が施されてしまうため、テンソルではないということに注意されたい。

測地線とは、粒子に相互作用が働かない場合の粒子の軌道を表しており、これは非自明な（曲がった時空の）計量のもとでの直線の一般的な概念である。一般相対性理論のもとでの測地線は、重力以外の力を受けない自由粒子の運動軌道に一致し、クリストフェル記号を用いた以下の測地線方程式で与えられる。

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \quad (2.2,7)$$

*1 教科書、または人によって $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ という風に計量を取る場合がある。Muhkanov などの教科書 [11] がその一例であり、注意が必要である。

ここで λ は測地線に沿った座標を記述するパラメータであり、アフィンパラメータ (Affine parameter) と呼ばれる。測地線方程式を計算するためには、計量 $g_{\mu\nu}$ に対するクリストフェル記号の成分を計算しなければならない。式 (2.2,2) で与えられる FLRW 計量での平坦宇宙に対しては $g_{\mu\nu}$ の微分はほとんど消え、結果的に以下のようなクリストフェル記号の成分を得ることができる。

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\mu}^0 &= \Gamma_{\mu 0}^0 = 0, & \Gamma_{ij}^0 &= \gamma_{ij}\dot{a}a, \\ \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{j0}^i = \delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{lk,j} + \gamma_{jl,k} - \gamma_{jk,l}).\end{aligned}\tag{2.2,8}$$

クリストフェル記号は、リッチテンソルを定義するためにも必要である。リッチテンソルはアインシュタイン方程式に登場するテンソルであり、以下のように定義される:

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta.\tag{2.2,9}$$

リッチテンソルの縮約はリッチスカラーと呼ばれており、

$$\mathcal{R} \equiv R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\tag{2.2,10}$$

と計算される。ここで $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。

FLRW 計量宇宙では、リッチテンソルとリッチスカラーは簡単に計算することができる。リッチテンソルは対角テンソルであり、その成分は

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a},\tag{2.2,11}$$

$$R_{ij} = \delta_{ij}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}),\tag{2.2,12}$$

である。これより、リッチスカラーは、

$$\mathcal{R} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right),\tag{2.2,13}$$

となる。これらはアインシュタイン方程式に登場する量であり、次の 2.3 節にて紹介する。一様等方宇宙に対するゆらぎを導入する場合、宇宙の計量はより複雑になってしまう。

2.3 Einstein Equation

宇宙の進化はアインシュタイン方程式から導くことができる。アインシュタイン方程式は以下の通りである:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}.\tag{2.3,1}$$

また、 $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ で定義されるアインシュタインテンソルを用いて

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}\tag{2.3,2}$$

と書かれる場合もある。ここで G はニュートン定数であり、 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$ である。

対称テンソル $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルと呼ばれるテンソルであり、宇宙のエネルギー要素についての情報を含んでいる。(詳しくは Appendix の付録 E を参照してほしい。) 一様等方完全流体の場合、これは

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.3,3)$$

のように書き表される。ここで、 u_μ は流体の局所的な 4 元速度であり、局所共動座標系では $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ になる。さらに、 ρ と p は運動量分布関数 f を用いて、以下のように定義される:

$$\rho = g \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} f(P)E(P), \quad (2.3,4)$$

$$p = g \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} f(P) \frac{P^2}{3E(P)}. \quad (2.3,5)$$

ここで、 P は運動量、 g は着目している粒子の内部自由度である。

エネルギー保存則より、ストレスエネルギーテンソル $T_{\mu\nu}$ の共変微分は消えるはずである。

$$D_\mu T_\nu^\mu \equiv \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0. \quad (2.3,6)$$

これは、古典論での連続の式やオイラー方程式の一般相対論バージョンの式である。一様等方完全流体の場合、エネルギー運動量テンソルは式 (2.3,3) になっているので、式 (2.3,6) の $\nu = 0$ 成分は

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w)\rho = 0, \quad (2.3,7)$$

である。ここで着目する流体の状態方程式 $p = wp$ を用いた。この式は、様々な流体に対してエネルギー密度 ρ とスケール因子 a の間の関係を得るために、以下のように変形することができる。

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = a^{-3} \frac{\partial (\rho a^{3(1+w)})}{\partial t} = 0. \quad (2.3,8)$$

これは、先ほどの式 (2.3,7) の見た目と一変して、 $\rho a^{3(1+w)}$ が時間に対して一定であることを示している。様々な流体はそれぞれの状態方程式を持っているため、宇宙膨張中のエネルギー密度の振る舞いは異なる。例えば、放射に対しては $w = 1/3$ であり、エネルギー密度は $\rho_r \propto a^{-4}$ である一方、非相対論的物質に関しては $w = 0$ であり、エネルギー密度は $\rho_m \propto a^{-3}$ である。

我々の宇宙は単一の完全流体からできてはいるわけではなく、異なる特性を持つ異なる成分の混合流体で構成されている。宇宙の異なる流体成分のエネルギー密度が異なる進化をたどるという事実は、宇宙の歴史において様々な特徴の異なる時期を遂げてきたことを意味している。実際ビッグバン宇宙では、最初に放射優勢期を迎えた後に、物質優勢期を迎える。さらには、観測によると近傍宇宙は加速膨張しており、なにか新しい時期を迎えたことを示唆している。物質や放射は宇宙を加速膨張させる効果はないため、このような状態は物質優勢期や放射優勢期では再現し得ない。宇宙の加速膨張を説明するためには、宇宙定数 Λ などの負の圧力を持つ何か新しいものを導入す

る必要がある。宇宙定数とは、状態方程式パラメータが $w = -1$ であり、この場合式 (2.3,8) より (完全流体の場合ではあるが)、エネルギー密度 ρ_Λ は時間によって一定である。宇宙定数を新しい流体として取り扱い、アインシュタイン方程式やエネルギー運動量テンソルに含めることは可能である。宇宙項を含めたアインシュタイン方程式は、

$$R_{\mu\nu} + \left(\Lambda - \frac{1}{2}R \right) g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.3,9)$$

のように変更される。

2.4 Friedmann Equation

式 (2.3,3) を式 (2.3,9) に代入し、さらに FLRW 計量におけるリッチテンソル (式 (2.2,12) (2.2,11)) やリッチスカラー (式 (2.2,13)) も代入するとアインシュタイン方程式から 00 成分と ii 成分に対応する独立した 2 つの式を得ることができる。これらはフリードマン方程式とよばれており、

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.4,1)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (2.4,2)$$

と書き表される。ここで $\rho = \sum \rho_i$ と $p = \sum p_i$ は、それぞれ宇宙のトータルエネルギー密度と圧力を表している。トータルエネルギー密度と圧力は存在する全ての種類の流体からの寄与を含んでいる。例えば、光子やバリオン、DM、宇宙定数、ニュートリノなどからの寄与である。すでに登場している”放射”と”物質”の区分を今一度明確にしておこう。”放射”成分とは、その時刻に相対論的に振舞っている流体である。つまり光子や、非相対論的になる前 (十分高温宇宙の際の) バリオンやニュートリノなどが含まれる。かたや”物質”成分とは、非相対論的に振る舞うようになってからのバリオンやニュートリノ、そして DM などが含まれる。また、宇宙定数は 2.3 節で触れたように $w = -1$ という負の圧力を持つ未知の流体成分である。もう少し詳しく言及すると、負の圧力を持つためには必ずしも宇宙定数 ($w = -1$) でなければいけないわけではない。一般に、負の圧力を持つためには式 (2.4,2) より $w < -1/3$ を満たしていればよい。さらに、この不等式を満たす状態方程式パラメータであれば時間依存していても良く ($w = w(t)$)、これらは通常暗黒エネルギー (Dark Energy: DE) と呼ばれている。更に言えば、もし宇宙が曲率を持っていた場合、式 (2.2,11) (2.2,12) のリッチテンソルが曲がった FLRW 計量に対応するように変更を受け、式 (2.4,1) は以下のように曲率による項が追加される。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.4,3)$$

また、式 (2.4,1) より臨界密度を定義することができる。

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (2.4,4)$$

これは、とある時刻の平坦宇宙のトータルエネルギー密度である。今日の臨界密度 ρ_{c0} は現在のハッブルパラメータ H_0 にも依存している。この臨界密度を用いると、我々はある種 i のエネルギー密度 ρ_i と臨界密度 ρ_c の比により密度パラメータと呼ばれる量を定義することができる:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (2.4,5)$$

例えば、宇宙定数、曲率、物質そして放射成分に対してそれぞれ $i = \Lambda, k, m, r$ を代入するのである。様々な種の密度パラメータを用いることで、フリードマン方程式 (2.4,1) は

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_\Lambda + \Omega_{k0} a^{-2} + \Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4}), \quad (2.4,6)$$

のように書くことができる。ここで、それぞれの種に対して式 (2.3,8) を用いた。

式 (2.4,6) からわかる一番大切なことは、宇宙の進化がそれぞれの成分に対する相対的エネルギー密度によっているということである。様々な時刻において、相対的エネルギー密度がもっとも高い成分があり、その成分に応じておおよそ $H = \dot{a}/a$ は記述され、宇宙の振る舞いは決定される。近年の Planck 衛星による CMB の観測から、Planck collaboration が現在における様々な流体の密度パラメータを見積もった [12]。これによると、宇宙定数の密度パラメータはおおよそ $\Omega_\Lambda \simeq 0.68$ 、物質の密度パラメータは $\Omega_{m0} \simeq 0.32$ 、そして放射成分の密度パラメータは $\Omega_{r0} \simeq 10^{-5}$ であった。これゆえ、宇宙定数が今日の宇宙にて主なエネルギー密度源になっていることがわかり、現在の宇宙は Λ 優勢期と呼ばれている。時間を遡ると曲率優勢期があると期待されるかもしれないが、Planck Collaboration 2018 で発表された曲率の密度ゆらぎは $\Omega_{k0} = 0.001 \pm 0.002$ であり、宇宙はほとんど平坦である。それゆえ、宇宙が開いているもしくは閉じている可能性についてはここでは考えないことにする。

また式 (2.4,6) において、 $a = 1$ を考えると、得られる以下の式も重要である。

$$\Omega_\Lambda + \Omega_{k0} + \Omega_{m0} + \Omega_{r0} = 1. \quad (2.4,7)$$

次に、フリードマン方程式の 2 番目の式に話を変えよう。式 (2.4,2) を書き換えると、以下のような減速パラメータ q_0 を定義できる:

$$q_0 \equiv - \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)_{t=t_0} \frac{1}{H_0^2}. \quad (2.4,8)$$

この値は、宇宙が減速膨張する場合正に、加速膨張する場合負になる。 H_0 の定義と様々な流体の状態方程式パラメータを用いると、減速パラメータ q_0 は

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_{i0} (1 + 3w_i), \quad (2.4,9)$$

のように書き直せる。もし宇宙定数 Λ 、もしくは $w < -1/3$ をもつ DE が宇宙を支配していた場合、 q_0 は負になり、膨張宇宙になる。

2.5 The Hubble Law and distance of the Universe

宇宙での距離の見積もりは、宇宙論における最も難しい測定のうちの1つである。基本的な距離は、共動座標系における2点間の距離、共動距離である。一方で物理的な距離は共動距離と宇宙のスケール因子によっている。

もう1つ重要な距離として、宇宙の始まり $t = 0$ から光が飛び回れる最大の距離が挙げられる。時間 dt の間に光が飛べる共動距離は $dx = dt/a$ なので、時刻 $[0, t]$ の間に光が飛べる共動距離は

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.5,1)$$

で求められる。これは共動座標系において時間 t の間に情報が伝達できる最大の距離であり、しばしば粒子ホライズンと呼ばれる。つまり、粒子ホライズン η よりも離れた2点は、少なくともその時間にはまだ因果関係を持たない。スケール因子と赤方偏移、そして時間の関係性から式 (2.5,1) は

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.5,2)$$

のように変形することもできる。ここで H はハッブルパラメータである。

この粒子ホライズンに対応する物理的な距離は

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.5,3)$$

で表される。

式 (2.2,5) 中の球面座標系における FLRW 計量を用いると、

$$\frac{dz}{H} = d\eta = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.5,4)$$

の関係が導ける。よって時刻 t における曲率を含めた一般的な2点間の物理的な距離は

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.5,5)$$

と書き表すことができる。平坦宇宙の場合は、 $k = 0$ なので、

$$d_p(t) = a(t)r, \quad (2.5,6)$$

である。共動座標系において特異速度がない場合、つまり $\dot{r} = 0$ の場合、着目している2点間の相対速度の大きさはお互いの共動距離に依存していて

$$v \equiv \dot{d}_p = \dot{a}(t)r = H(t)d_p, \quad (2.5,7)$$

で求めることができる。これより $t = t_0$ を代入すると、2.1 節で紹介したハッブルの法則を得ることができる。

$$v = H_0 d_p. \quad (2.5,8)$$

この式は、距離が離れているほど相対速度が早くなることを示しており、実際にハッブルの法則を観測により確認することは、宇宙が膨張していることを確かめる貴重な証拠となる。

ハッブルパラメータ H_0 を測定するためには、とある 2 点間の距離と速度を求めなければならない。後者は、赤方偏移 z とからめるとわかりやすい。離れた天体から放射された光は、宇宙膨張によりこの天体が我々に対して後退していつているがゆえに、我々の元に届く間引き延ばされる。放射された光の波長の伸びを定義するためには、赤方偏移 z を導入すると便利である。

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (2.5,9)$$

これは、2 つの対象間の相対速度によるドップラー効果を表している。ここで o と e の下添字は、観測者 (observer) と放射天体 (emitter) をそれぞれ表している。通常、観測者は現在の地球上の観測機器に対応するため、放射時間 t_e でのスケール因子 $a_e = a(t_e)$ に対応する赤方偏移 z_e は、 $a(t_0) = 1$ とすると

$$1 + z_e = a_e^{-1}, \quad (2.5,10)$$

である。一般相対性理論において、光の波長の伸びは音波や電磁波に対して生じるドップラー効果のような効果からだけでなく、宇宙が膨張していることによっても生じ、これによってより多くの光子のエネルギー密度が薄められる。更に言えば、光子は時空の歪みや飛んでくる方向上の重力ポテンシャルの変化によっても赤方偏移 (もしくは青方偏移) する。例えば、光子は、重力ポテンシャルを登る際にエネルギーを失い赤方偏移し、逆に重力ポテンシャルを下る際にエネルギーを得て青方偏移する。

H_0 を決定するときに最も難しい過程は、距離 d_p の決定である。距離を決定する 1 つの手法として、見かけの明るさを用いる方法がある。この原理は至って簡単で、通常我々が観測する見かけの明るさは光源が遠ざかれば遠ざかるほど暗くなる。この暗さは一般に光源の絶対的光度の強弱と光源との距離の遠近とで縮退してしまうが、もし光源の絶対的な明るさを知っていれば、見かけの明るさを使って距離の指標とすることができる、というものである。静止ユークリッド空間では、見かけの明るさは単純に距離の二乗に反比例するが膨張宇宙ではこれが成り立たない。膨張宇宙におけるこの距離と見かけの明るさの関係を詳しく見ていこう。

光の伝播の途中で吸収がない理想的な場合、天体そのものの光度 L と我々が観測する見かけの天体の明るさ F は比例する。ここで、光度 L とは天体の静止系において単位時間あたりに放出される全エネルギーである。見かけの明るさ F とは単位面積、単位時間あたりに観測者が受けるエネルギーであり、これは観測者の位置でのフラックス (Flux) とも呼ばれる。光度とフラックスは観測する光の波長または周波数ごとに定義できるものである。そこで微小な周波数範囲 $[\nu, \nu + \delta\nu]$

における天体の光度を $L(\nu)\delta\nu$ とし、同じ周波数範囲のフラックスを $F(\nu)\delta\nu$ とする。これらの関数は単位周波数あたりの光度及びフラックスを表している。(ここでの $L(\nu)$ や $F(\nu)$ はそれぞれ光度、フラックスの周波数分布を表しており、単位はそれぞれ $[\text{J}/\text{s}/\text{s}^{-1}]$, $[\text{J}/\text{m}^2/\text{s}/\text{s}^{-1}]$ であることに注意。) 静止ユークリッド空間でのこの2つの関係は、観測する波長によらず

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (2.5,11)$$

となる。しかし、FLRW 計量では膨張と曲率の効果により、この関係が変更を受けるのだ。

まず、宇宙膨張による赤方偏移のため光のエネルギーが小さくなる。光源から、微小な波長周波数 $[\nu, \nu + \delta\nu]$ 及び時間範囲 $[t, t + \delta t]$ に放出されるエネルギーは

$$\delta E = L(\nu)\delta\nu\delta t, \quad (2.5,12)$$

である。1光子あたりのエネルギーは $h\nu$ であるので、その光子数は

$$\delta N = \frac{\delta E}{h\nu} = \frac{L(\nu)}{h\nu}\delta\nu\delta t, \quad (2.5,13)$$

である。一方で、これらの光子を観測者が観測するときの波長 λ_0 は、赤方偏移で伸ばされ $\nu_0 = \nu/(1+z)$ で与えられる。さらにこれらの光子を観測者が受けとる時間間隔 δt_0 は、 $\delta t_0 = (1+z)\delta t$ となるので、式 (2.5,13) を観測者側の周波数と時間で表すと

$$\delta N = \frac{1}{h\nu_0(1+z)^3}L(\nu_0(1+z))\delta\nu_0\delta t_0, \quad (2.5,14)$$

となる。いま、天体の赤方偏移を z とすると、観測者を原点にとったときの光源の動径座標値 $r(z)$ は式 (2.5,5) を積分する (平坦宇宙の場合は単に式 (2.5,1) を積分する) ことで得られる。そしてこの値は、逆に光源を原点とした座標での観測者の座標値にも等しい。FLRW 計量において共動距離 r が一定の球面の物理的な面積は、 $4\pi a_0^2 r^2$ であるので、観測者が単位面積、単位時間あたりに受けるエネルギーは

$$F(\nu_0)\delta\nu_0 = \frac{h\nu_0 \cdot \delta N}{4\pi r^2 \delta t_0}, \quad (2.5,15)$$

になる。よって、観測者の位置でのフラックスは、

$$F(\nu_0) = \frac{1}{4\pi r^2(1+z)^3}L((1+z)\nu_0), \quad (2.5,16)$$

である。

ここまで周波数ごとの放射を考えてきたが、全周波数にまたがる放射を観測することを考えてみる。全周波数で積分したフラックスはボロメトリック・フラックス (bolometric flux) と呼ばれ、

$$F_{\text{bol}} = \int_0^\infty d\nu_0 F(\nu_0). \quad (2.5,17)$$

である。同様に、天体から放出される全エネルギーはボロメトリック光度 (bolometric luminosity) と呼ばれ、

$$L_{\text{bol}} = \int_0^{\infty} d\nu L(\nu), \quad (2.5,18)$$

である。よって、式 (2.5,16) を全周波数で両辺積分すると、

$$F_{\text{bol}} = \frac{L_{\text{bol}}}{4\pi r^2(1+z)^2}, \quad (2.5,19)$$

という形になる。これら 2 つの量 F_{bol} , L_{bol} を用いて、あたかも静止ユークリッド空間にいるかのように天体までの距離を見積もったものが光度距離 (luminosity distance) と呼ばれ、

$$d_L = \left(\frac{L_{\text{bol}}}{4\pi F_{\text{bol}}} \right)^{1/2} = r(1+z), \quad (2.5,20)$$

のように定義される。

この量は、 $z \ll 1$ の近傍宇宙の極限では測地的な共動距離に近づいていくが、一般に共動距離と等しくはない。すなわち光度距離は物理的な距離そのものではないのだが、物理的な距離と一対一関係を持つ距離の指標となっている。

しかしながら我々は通常、天体の絶対光度を知らないため、光度距離の見積もりは一般に困難である。ただし、常に一定の光度で光っており、フラックスを地球上で測定することで光度距離を見積もることができる天体も中には存在する。こういった天体は、標準光源と呼ばれる。標準光源の例としては、変光周期によって絶対等級が変わるという特徴を持つセファイド変光星や Ia 型超新星が挙げられる。

もう 1 つの距離を決定する方法として、角径距離というものがある。これは、長さ l の着目している天体が天球面上で $\Delta\theta$ の角度サイズで観測されることを考える。静止ユークリッド空間においては、この天体の距離を r とすると $\Delta\theta \ll 1$ の極限においては

$$l = r\Delta\theta, \quad (2.5,21)$$

が成り立つ。しかし光度距離の時同様、この関係性は膨張宇宙において破綻する。

まず、視線に垂直な方向への長さ l の両端の座標値 (r, θ, ϕ) が $(r, 0, 0)$ 及び $(r, \Delta\theta, 0)$ となるような座標を取る。時刻を固定すると、この長さ l に沿って $dt = d\phi = 0$ となるから、FLRW 計量の線素は $ds = ar d\theta$ となる。よって、光が出発した時刻の赤方偏移を z とすると、その物理的な長さ l は

$$l = \int_{\Delta\theta}^0 ar d\theta = ar\Delta\theta = \frac{r}{1+z}\Delta\theta, \quad (2.5,22)$$

となる。ここでも、あたかも静止ユークリッド空間であるかのようにして見かけの角度から見積もった距離を考えてあげる。このような距離

$$d_A \equiv \frac{l}{\Delta\theta} = \frac{r}{1+z}, \quad (2.5,23)$$

を角径距離という。この距離指標は、光度距離 d_L と本質的に異なる情報を持っている訳ではなく、お互いに以下のような単純な関係にある。

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (2.5,24)$$

角径距離の赤方偏移に対する依存関係は平坦宇宙において

$$d_A = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.5,25)$$

で与えられる。

宇宙論的観測の文脈では、角径距離は特に銀河間の距離を測定するのに使われる。実際、光子の脱結合時より前の宇宙における、バリオンと光子の間の重力ポテンシャルと輻射圧力のバランスによって作られるバリオン音響振動 (Baryon Acoustic Oscillations: BAO) によって、銀河間の典型的な距離が見積もられる。この典型的な距離は、宇宙の進化の仕方に依存しているため、宇宙論パラメータを制限するためにも使われている。

2.6 Dark Matter

太陽系の質量における太陽の質量の割合は 99% 以上である。もしも同様に宇宙の質量のほとんどが光輝く星や銀河であったとするなら、それらの観測により宇宙のおおよその質量を見積もることができる。しかし、現実にはそのようになっていない。天体の運動や大規模構造、さらに CMB 温度ゆらぎの観測などを通じて、宇宙に存在する物質の重力的効果を見積もってみると先ほどのような光り輝く星や銀河による重力的効果を足し合わせたものよりもはるかに強かったのである。ここにさらに十分に光を発することができない矮星や銀河、さらに銀河間ガスなどを足し合わせてもこの重力的効果の強度は説明できなかった。それゆえ、宇宙には我々の知らない重力源になる未知の物質が大量に存在することがわかった。例えば、2.4 節にて紹介した Planck 衛星の観測結果によると、これらの未知の物質は宇宙全体のエネルギーのうちおよそ 27% をも占めていることがわかっている。(図 2.1 参照。) これは現在でも正体がわかっておらず、DM と呼ばれている。

DM の存在が最初に示唆された研究を紹介する、それは、1933 年の Fritz Zwicky による、かみのけ座銀河団中の 7 つの銀河の解析を行なった研究である。彼は、銀河団中で銀河が運動する速度分散と多体系のビリアル定理により銀河団の重力ポテンシャルの値を見積もった。さらに銀河団の大きさを考慮することでその総質量を推定し、銀河団の質量・光度比を導いた。その一方で、渦巻銀河は回転しているため、その回転速度から銀河の質量を推定できる。近傍の渦巻銀河から見積もった銀河の質量・光度比と彼がすでに見積もっていたかみのけ座銀河団の質量・光度比を比べてみると後者の方がおよそ 400 倍程度大きいという結果を得た。これは、銀河団の質量が銀河の質量の足し合わせに一致しないこと意味し、彼は銀河団には見えない物質が存在することを結論づけた。

また、その後 1970 年代後半に行われた渦巻銀河回転曲線の観測の話も有名である。銀河回転曲線とは、銀河の中心から半径方向に回転速度をプロットした曲線のことであり、多くの渦巻銀河で

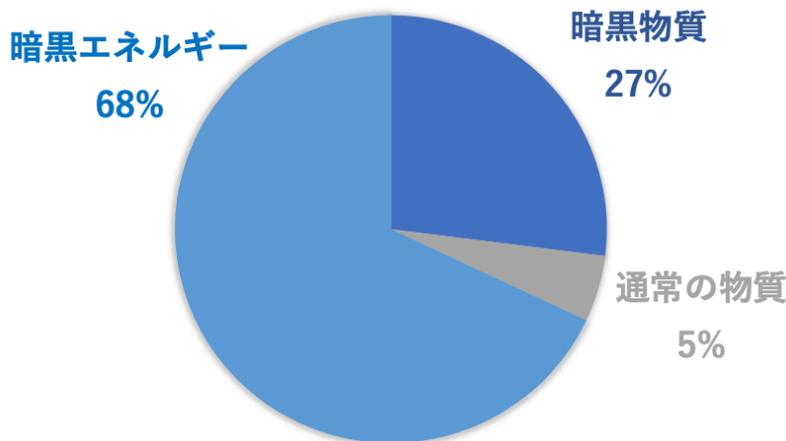


図 2.1 宇宙のエネルギーの内、それぞれの成分が占める割合。Planck collaboration による 2018 年公開のデータ [12] を元としている。

は、明るい部分が銀河のバルジとその周辺に集中しており、外側へ行けば行くほど暗くなる。明るさの分布と質量の分布が対応していると考えれば、銀河系の外側ではおよそ中心部の質量による引力で回転速度が決まるはずである。このような回転はケプラー回転と呼ばれており、回転速度は重力と遠心力のつりあいの式により簡単に求めることができる。しかしながら、観測した半径においてケプラー速度よりも大きな速度を持っていたことが判明したのである (図 2.2 を参照。)。これにより、DM の存在が裏付けられた。

DM の存在を裏付ける研究はこのように多数存在するのだが、その正体は今でもなお不明のままである。宇宙の物質成分の大部分を占める DM の解明は、大規模構造形成をはじめとする宇宙の進化を解き明かすために必要不可欠であり、宇宙論に課せられた重要な課題になっている。DM のモデルは現在様々なものが考案されているが、第 6 章で紹介する私の研究 [9] ではそのモデルの 1 つである PBH に着目し研究を行なっている。そのため、次の第 3 章では PBH について紹介する。

最後に DM の分類について触れておく。現在の宇宙の大規模構造はインフレーション由来の初期ゆらぎが重力成長したことで作られたと考えられている。この形成過程において、宇宙の重力的効果の大半を担う DM の役割は非常に重要である。このような宇宙の構造形成において、DM は無衝突減衰の有無によって大きく分けて 3 つの種類に分類される。無衝突減衰とは、DM が無衝突粒子からできていると考えた場合に粒子の速度分散の大きさからその自由運動によってゆらぎが減衰してしまう効果である。

宇宙の構造形成において無衝突減衰が無視できない DM は熱い暗黒物質 (Hot Dark Matter: HDM) と呼ばれている。一方、無衝突減衰が無視できる DM のことは冷たい暗黒物質 (Cold Dark Matter: CDM) と呼ばれている、さらにその中間的な性質を持つ DM のことを暖かい暗黒物質 (Warm Dark Matter: WDM) と呼ぶ。基本的には、無衝突減衰が起きてしまうと構造形成に必要なゆらぎがかき消されてしまうため都合が悪い。実際、大規模構造形成の時間発展をおったシミュレーションにて現実の宇宙を再現しようとした場合、CDM が好まれていることが知られている。

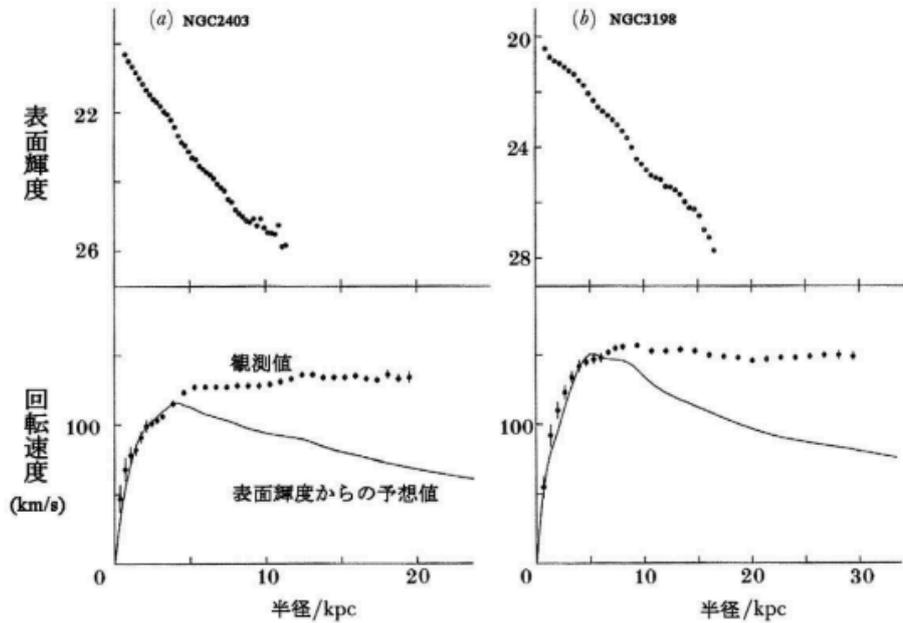


図 2.2 銀河の表面輝度と回転速度 vs 銀河を中心とした半径. (a) は渦巻銀河 NGC2403, (b) は渦巻銀河 NGC3198 の表面輝度と回転速度を表す. 銀河の回転速度はどちらも半径によらずほぼ一定であり, 重力源になる質量が半径に比例して増えていることを示している. 速度一定の半径は光輝く星の集団である円盤よりも遠い場所までおよび, DM の存在を示している. 文献 [13] から引用.

そのため, 通常標準宇宙論において何も言及なく DM と書いた場合は, CDM を想定していることがほとんどである.

2.7 Evolution History of the Universe

この章の最後に, これまでの話をまとめとして宇宙の歴史と, 宇宙年表を記載しておく.

ビッグバン宇宙において, 宇宙は非常に高温で密なプラズマ状態から始まり, 宇宙膨張とともに冷えていったとされている. しかしながら, 現在地球上で到達可能なエネルギースケールは, 大型のハドロン衝突型 (Large Hadron Collider: LHC) 加速器にて得られている, 数 10TeV であるため, それよりも高いエネルギースケールを説明する物理は確立されていない. これは宇宙の初期を十分に理解しているとは言い難い. 非常に高エネルギー状態にある初期宇宙を十分に理解するためには, 現状の基礎物理学を超越した量子重力が必要であると考えられている.

ビッグバンより前, 宇宙はどこから始まったのであろうか. その 1 つの可能性として現在信じられているのは, 宇宙が量子ゆらぎにより無から生成され, インフレーション期間を経て, ビッグバン宇宙になった, という機構である. インフレーション期間とは, スケール因子 a が $a(t) = \exp(Ht)$

に従って指数関数的に増大する期間である。このような指数関数的な膨張を実現するためには、初期のフリードマン方程式が $H^2 \simeq \text{const}$ となり、エネルギー密度が一定である必要がある。インフレーション中の宇宙定数 Λ_I を用いると、これは $H \simeq \sqrt{\Lambda_I/3}$ である。

インフレーションは、もともと 1980 年代に宇宙の地平線問題や平坦性問題を解決するために考えられた機構である [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]。地平線問題とは、かつての宇宙のホライズン半径よりも離れた領域間を観測しても、なぜか両領域が極端に一樣であるという観測事実をどのように説明するのか、という問題である。これらの領域は、インフレーション機構の存在を仮定しない、標準的な宇宙進化モデルを想定する場合、過去に因果関係がなかった領域である。過去に因果関係を持ち得ないほど離れていた領域が今日の観測で非常に類似しているということは、自然に考えると奇妙なことである。しかしながら、宇宙がその初期に指数関数的に膨張（インフレーション）していた場合、インフレーション終了以前に因果関係のあった領域が引き伸ばされたと考えればこれは奇妙ではなくなる。つまり、インフレーション終了以前に因果関係があった原始ゆらぎが、インフレーション後、おそらく今日まで独立して進化を遂げたと考えるのである。

宇宙の平坦性問題とは、現在の宇宙の曲率が 1 に非常に近い、つまり極端に平坦であるという事実をどのように説明するのかという問題である。最も強い制約は、Planck 衛星の観測から来ていて [12]、CMB スペクトルにおける Planck 衛星の観測データによると、曲率密度パラメータは $\Omega_k^0 = 0.001 \pm 0.002$ である。例えば、閉じた宇宙を考えると、減速膨張を経て最終的に膨張が止まって収縮に転じ、ビッグクラッシュと呼ばれる特異点に到達してしまう。また開いた宇宙における膨張を考えると、その膨張速度が早くなりすぎてしまい天体が作られなくなってしまうことが危惧される。なぜこのような宇宙を回避して我々の宇宙が作られたのであろうか。更に言えば、先程の Planck2018 の制限を満たすためには、ビッグバン元素合成 (Big Bang Nucleosynthesis: BBN) の際、宇宙のトータルエネルギー密度 $\Omega_{\text{tot}} = 1 - \Omega_k$ が $|\Omega_{\text{tot}} - 1| \leq 10^{-18}$ を満たす必要がある。過去に遡ると曲率の密度パラメータも小さくなっていくため、微調整問題としても問題視されてきた。

しかしながら、インフレーション機構、つまり指数関数膨張によって曲率を非常に小さくすることでこの問題を解決することができる。インフレーション中は、 $|\Omega_{\text{tot}} - 1| \propto \exp(-\sqrt{4\Lambda_I/3}t)$ という関係式が成り立つため、インフレーション期間が長く続けば続く程、 Ω_{tot} は最終的に 1 に近づいていく。地平線問題と平坦性問題を共に解決するためには、インフレーション期間が e-folding number の言葉で、少なくとも 50 から 60 必要である。e-folding number とは、単位を指数膨張で測ったスケール因子であり、 $a(t_{\text{end}}) = e^N a(t_{\text{ini}})$ 、または $N = \ln(a(t_{\text{end}})/a(t_{\text{ini}}))$ のスケール因子の増加に対応している。

インフレーション機構は一般にインフラトンと呼ばれるスカラー場 ϕ を導入して説明される。インフラトンは、ポテンシャル V_ϕ をゆっくりと転がる際、宇宙定数のように振る舞うことが知られている。インフレーション期間はインフラトンの速度がある程度早くなって来た際に終了する。また、そこからインフラトンが重たい粒子に崩壊し、その崩壊先の粒子のプラズマにエネルギーを受け渡すと考えられている。インフラトンとカップルしている粒子のプラズマの温度がインフラトンのエネルギーによって加熱されるため、この過程は再加熱期と呼ばれている。

宇宙の初期、温度が十分高い時は、粒子は頻繁に相互作用するため、熱平衡状態になっている。しかしながら、宇宙の温度は宇宙膨張とともに徐々に下がっていく。温度が下がっていくにつれて、プラズマ中で起こる粒子間の相互作用が変わり、それまで豊富に存在していたいくつかの粒子は生成されなくなってしまう。これは、不安定な粒子にとって、生成と消滅過程が平衡状態からずれて、消滅していってしまうことを意味する。同時に、高温宇宙では非常によく成立していたいくつかの対称性が自発的に破れ始める。宇宙の温度は $T \sim 200\text{GeV}$ 程度に下がると、電弱対称性が破れ、電磁相互作用と弱い相互作用が分離する。その際、対称性がまだ残っているゲージ粒子である、光子とグルーオンを除いて、様々な粒子がヒッグス機構により質量を獲得する。この時代では宇宙はまだ高温であるため、これらの粒子は宇宙の温度が質量を下回るまでは、相対論的な粒子として振る舞う。 t クォークのように質量が非常に高く、最初から相対論的な粒子として振る舞うことができない場合もある。クォークに関してもこの時はまだ運動エネルギーが非常に高いため、ハドロンに閉じ込められることはない。しかしながら、宇宙の温度のさらに低下し $T \sim 200\text{MeV}$ 程度になると、クォーク・グルーオンプラズマ状態が保てなくなり、クォークとグルーオンはハドロンとしてしか存在できなくなる。これはクォーク・ハドロン転移と呼ばれている。この転移後、まもなくラムダ粒子などの不安定なバリオンや、パイ中間子、 μ 粒子が消滅する。この段階で宇宙に存在する粒子は陽子 p 、中性子 n 、光子 γ 、電子、陽電子 e^\pm 、そして3種類のニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ とその反粒子 $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ のみとなる。バリオンとして陽子と中性子ののみが残り、それらの反粒子が残らないのは、この宇宙が粒子と反粒子の数について非対称になっているためである。この非対称性は、宇宙初期のクォーク生成機構由来であると考えられているが、本論文ではこれ以上詳しいことについては言及しないことにする。

宇宙の温度がおおよそ 1.5MeV になると、ニュートリノと電子の平衡相互作用が破れ、ニュートリノはプラズマから脱結合する。これらの脱結合したニュートリノが、宇宙ニュートリノ背景 (Cosmic Neutrino Background: CNB) の起源である。これらのニュートリノのエネルギーは非常に低いため、現在この CNB を直接検出するのは非常に困難である。

ニュートリノ脱結合の後、宇宙の温度が 0.5MeV 以下になり電子の質量を下回ると、電子陽電子対生成が起きなくなり、電子陽電子対消滅 $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ により、電子のエネルギーが光子に流れ込むとともに、陽電子はほとんどなくなる。残った電子も非相対論的になっているためプラズマからは脱結合する。

宇宙の温度がさらに冷えて、おおよそ 100keV になると、自由に飛び回っていた中性子は陽子と結合し束縛状態の原子核として落ちつくようになる。これが宇宙初期に起きる原始元素合成、BBN である。この時点ではまだ光子のエネルギーが高く、電子と原子核が結合することはなく、バリオンは電離している状態である。その後、物質放射等密度時を迎え、宇宙は物質優勢期に突入する。ここから、光子・ニュートリノなどの放射成分が宇宙の進化に与える影響は小さくなり、物質の密度ゆらぎが重力によって成長し始める。光子はその後も宇宙膨張によって冷やされ、温度が $T \sim 0.1\text{eV}$ 以下に下回った時、光子はもはや電子・原子核の結合を壊せなくなり、原子の生成が始まる。そしてついに光子は自由に動けるようになる。これはビッグバンからおおよそ 38 万年後に起

| 宇宙年齢 [sec] | エネルギースケール | 宇宙の様子 |
|-------------------------------|-------------------|---------------------|
| $< 10^{-44}$ | $> 10^{19}$ [GeV] | 量子重力?? |
| $< 10^{-34}$ | $> 10^{14}$ [GeV] | 大統一理論 |
| 10^{-12} | 1 [TeV] | 電弱相転移 (EW) |
| 10^{-6} | 1 [GeV] | クォークハドロン相転移 (QCD) |
| ≤ 1 | 1 [MeV] | neutrino decoupling |
| ≥ 1 | 0.5 [MeV] | 電子対消滅 |
| 1 – 100 | 1 – 100 [keV] | ビッグバン元素合成 |
| $< 10^{12}$ | > 0.4 [eV] | 放射優勢期 |
| 10^{12} | 4000 [K] | (物質放射) 等密度時 |
| 1.14×10^{13} (38 万年) | 3000 [K] | 再結合時 |
| 再電離期 ($z \leq 20$) | | |
| ダークエネルギー優勢期 | | |
| 138 億年 | 2.7[K] | 現在 |

表 2.1 宇宙の年表. 文献 [22] から引用・改変.

き, 宇宙の”Recombination”期と呼ばれている*2. CMB は再結合期の以後, ほとんど他の粒子と相互作用しないため, CMB ゆらぎの情報は我々に宇宙の有益な情報をもたらす. 同様に, CNB もビッグバンからおよそ 1 秒後のニュートリノ脱結合時の宇宙の情報を我々にもたらす. しかしながら, CNB の検出, さらに CNB ゆらぎの研究をするには次世代の技術革新を待つ必要がある.

CMB の脱結合後, 重力相互作用のもとでの物質のゆらぎの進化は, 今日我々が観測する宇宙の構造形成につながっていく. 初期は線形的進化を辿っていたゆらぎが最終的には非線形進化をたどるのである. 宇宙進化の最終段階では, 大スケールにおいて物質優勢期ではなくなっている. はるか遠くの超新星の観測において近傍宇宙が加速膨張していることが確かめられたのだ. これは近傍, そして現在の宇宙が物質優勢期ではなく, DE 優勢期に入ったことを示唆している.

*2 同様に”Re”, つまり再がつく宇宙論用語に再加熱や再電離という専門用語がある. これらは文字通り再び加熱されたり再び電離されているのだが, Recombination, 再結合だけは異なり, バリオンにとって最初の結合であることに注意. 実はこれ, ビッグバン宇宙ではない宇宙モデルが人気であった時代の名残のようである.

第 3 章

Primordial black hole

この章では、DM の候補の 1 つである PBH についての紹介し、その性質、形成過程、存在量、そして現存の存在量制限に関して説明する。

3.1 Introduction for PBH

PBH というアイデアは 1960 年代に Zel'dovich と Novikov によって最初に考案された [23]. この段階では、PBH はただのアイデアでしかなかったのだが、そこから研究が進み、1971 年に Hawking により面白い論文が発表される。それは、初期宇宙における密度ゆらぎによって Planck 質量に至るまでの質量帯の PBH を多数形成することができるかもしれない、というものだった [24]. さらにその 4 年後の 1975 年、Chapline が初めて”PBH は DM になりうる”との趣旨の論文を Nature 誌に発表した [25]. Chapline がそのような論文を発表したことで、PBH が日の目を浴びたかというところではなかった。当時は DM のモデルとして、素粒子標準模型を超える理論から予言される”非バリオン粒子タイプ”のモデル、例えば、Weakly interacting massive particles (WIMP) [1] や Axion [2, 3, 4, 5], さらに Axionlike particles [6] などが主に研究されており、”天文学的なコンパクト天体タイプ”の DM モデルである PBH は当時の時代の流れにのることはできなかった。ただし、PBH は新しい未知の素粒子を導入することなく、DM を説明するというメリットがあることはここで強調しておきたいことである。

それでも PBH に新たな転機が訪れる。それは、21 世紀最大の発見とも言える重力波の検出である。アインシュタインの予言から丸 100 年経った 2016 年、レーザー干渉計を用いた重力波観測所、LIGO によって重力波が有意に検出されたことが発表された。解析の結果によると、この重力波は地球から 13 億光年ほど離れた場所で起きた、およそ $36M_{\odot}$ と $29M_{\odot}$ の質量を持った 2 つのブラックホール連星の合体により生じたものであった [26]. ついで検出されたブラックホール連星合体由来の重力波の解析によると、ソースの天体はどれも $\mathcal{O}(10)M_{\odot}$ の質量を持つブラックホールであることがわかっている [27, 28]. ただし、標準的な銀河環境下においてこのような重たいブラックホールを星経路で形成することが難しいことがわかっている [8]. これは、星由来のブラックホールでこの重力波イベントを説明することが難しいと言っているわけではないが、ここでは新

たな可能性として PBH による重力波イベントであることが挙げられることを主張したい。というのも、PBH は様々な質量帯にて形成が可能であるという特徴を持つため、この重力波イベントを容易に説明できるのである。(詳しくは 3.2 節を参照せよ。) さらに、PBH は形成時期(放射優勢期)に PBH 連星を形成する可能性も指摘されている [29]。このような特徴から、PBH 連星合体により多数の重たいブラックホール連星由来の重力波イベントの検出を説明できるかもしれないという期待が高まっている。上記の理由から、DM としての PBH の重要性は再び見直されるようになり、PBH に関する論文出版数は BH 連星合体による重力波イベント検出の前後で比べ、およそ 3 倍にも膨れ上がっている (HEP INSPIRE より)。また、現在では”天文学的なコンパクト天体タイプ”の DM モデルとして、PBH が最も可能性の高いモデルであると考えている人が多いことも言及しておく [7]。

3.2 PBH formation

次に、PBH の形成に関して簡単に説明していく。

PBH は非常に初期の宇宙において大きな原始密度ゆらぎをもった宇宙のホライズンサイズ程度の領域が重力的に崩壊することによって形成される天体である [23, 24]。インフレーションの自然な予言によると、量子的なゆらぎから原始密度ゆらぎが作られることがわかっている。もしも重力崩壊するための臨界密度ゆらぎの大きさを超えた原始密度ゆらぎがホライズンインした場合、その宇宙はまるごと重力的に崩壊して PBH を形成するのである。

密度ゆらぎをもった領域が PBH 形成に向けてどのように重力崩壊していくのかを大雑破に見ていこう。実際には、相対論的な効果が入ったり、球対称崩壊するのか、それとも非球対称崩壊するのかというような細かい物理が入ってくるため、計算が非常に煩雑になる。それゆえ、ここではこれらの話を割愛する。(詳しくは論文 [30] 等を参考にせよ。)

Friedmann 宇宙においては、とある時刻の粒子ホライズンを超えた距離にある宇宙は異なる Friedmann モデルに従っているように振る舞う。それゆえ 2 つの異なる宇宙において異なる密度を持つ場合、例えば (1) ホライズンサイズの密度ゆらぎ $\delta\rho$ を持つ宇宙と (2) 密度ゆらぎを全く持たない宇宙は異なる進化をたどることが知られている [31]。これら 2 つの宇宙の計量は以下のように書くことができる。

ゆらぎのない宇宙の計量:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.2,1)$$

ゆらぎのある宇宙の計量:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(1 + \delta) - \frac{\kappa}{A^2}. \quad (3.2,2)$$

ここで κ は曲率である。また、わかりやすくするために曲率のない宇宙のスケール因子を a 、局所的に曲率がある宇宙のスケール因子を A で書くことにする。2 つの宇宙の間に成り立つ条件として、ゆらぎのない宇宙の初期時刻 t_0 とゆらぎのある宇宙の初期時刻 τ_0 は同じであり、その時のスケール因子 a と A 、スケール因子の時間微分の値 $a\dot{a}$ と A' 、そして宇宙の平均密度 ρ_0 も 2 つの宇

宙で等しい値であるとする。

まずゆらぎのない宇宙について考える。宇宙が放射優勢である時の密度ゆらぎの時間進化の式 (2.3,8) と式 (3.2,1) より

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{1}{3}\rho\right) = 0, \quad (3.2,3)$$

が成り立つ。一般に $p = w\rho$ とすると

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (3.2,4)$$

と表せる。これを式 (3.2,1) に代入して

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{a_0^{3(1+w)}}{a^{3(1+w)}} = \frac{C}{a^{3(1+w)}}, \quad (3.2,5)$$

ここで $C \equiv 8\pi G a_0^{3(1+w)} \rho_0 / 3$ を導入した。これより、スケール因子 a が時刻 t のべき乗に比例しているとすると式 (3.2,5) より

$$a \propto t^{2/3(1+w)}, \quad (3.2,6)$$

であることがわかる。

同様にして今度はゆらぎのある宇宙を考える。ここで、簡単のため密度とスケール因子の関係やスケール因子の時間依存性はゆらぎのない宇宙の場合と変わらないことを近似した。

$$\rho \propto A^{-3(1+w)}, \quad (3.2,7)$$

$$A \propto t^{2/3(1+w)}, \quad (3.2,8)$$

であるとする。これを式 (3.2,2) に代入して

$$H^2 = \frac{\dot{S}^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0(1 + \delta_0) \frac{A_0^{3+3w}}{A^{3+3w}} - \frac{\kappa}{A^2}, \quad (3.2,9)$$

ここで式 (3.2,5) で定義した係数 C と $\delta_0 \equiv \Delta C / C$ を導入すると式 (3.2,9) は

$$H^2 = (C + \Delta C) \frac{1}{A^{3(1+w)}} - \frac{\kappa}{A^2} = C \left(\frac{1 + \delta_0}{A^{1+3w}} - \frac{\delta_0}{A_0^{1+3w}} \right). \quad (3.2,10)$$

となる。最後の等式には、最初に課した2つの宇宙の関係より、初期時刻における2つの宇宙のハッブルパラメータが等しいことから成り立つ関係式、

$$\Delta C \frac{1}{A_0^{1+3w}} = \frac{\kappa}{A_0^2}, \quad (3.2,11)$$

を用いた。上式 (3.2,10) よりゆらぎのある空間の膨張が止まり、収縮に転じる時刻のスケール因子 A_c は、 δ_0 が1より十分小さいとして

$$A_c \sim S_0 \delta_0^{-\frac{1}{1+3w}}, \quad (3.2,12)$$

と求められる。

この時の時刻 $\tau = \tau_c$ は、先ほどの式 (3.2,8) を用いて

$$\tau_c \sim \tau_0 \delta_0^{\frac{-3(1+w)}{2(1+3w)}}. \quad (3.2,13)$$

と求めることができる。初期時刻でのハッブルスケールの時刻 $\tau = \tau_c$ での値が時刻 $\tau = \tau_c$ での Jeans 長 (C,26) より大きければ収縮に転じたのち重力崩壊する。(詳しくは付録 C を参照せよ。) 初期時刻でのハッブルスケールは

$$l_0 = A_0 r_0 \sim c \tau_0, \quad (3.2,14)$$

である。ただし l_0 は初期時刻での物理的なハッブル長であり、 r_0 は共動座標系でのハッブル長である。 l_0 の時刻 τ_c での長さ l_c は、

$$l_c = A_c r_0, \quad (3.2,15)$$

である。よってこの値と時刻 $\tau = \tau_c$ での Jeans 長 (C,26) を比べることで、

$$S_c r_0 > R_{Jc} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_c}} \sim c_s \tau_c = c_s \tau_0 \delta_0^{\frac{-3(1+w)}{2(1+3w)}}. \quad (3.2,16)$$

の不等式成立時に重力崩壊することがわかる。この不等式に

$$S_c r_0 = S_c \frac{\tau_0}{S_0} = \tau_0 \delta_0^{\frac{-1}{1+3w}}, \quad (3.2,17)$$

を代入すると

$$\delta_0 > c_s^2, \quad (3.2,18)$$

となる。以上より宇宙が放射優勢である時、 $c_s = 1/\sqrt{3}$ を考慮すると、初期時刻での密度ゆらぎ δ_0 が

$$\delta_0 > \frac{1}{3}, \quad (3.2,19)$$

の時に重力崩壊することがわかる。

ここまでで、放射優勢な初期宇宙において、宇宙全体が重力崩壊するためには、不等式 (3.2,19) を満たすようなホライズンスケールの密度ゆらぎが存在することが必要であることがわかった。ただし、重力崩壊したのちブラックホールまで一気に潰れられるかはまた別の問題である。しかしながら、面白いことにそのような十分初期の宇宙においては Jeans 長がおおよそその宇宙が全部崩壊してできるであろう質量のブラックホールのシュワルツシルト半径になっているのである。それを以下に示す。(ここでは、わかりやすいように光速 c を明確に表記しておく。)

とある時刻の宇宙の全質量を M_{Uni} 、密度を $\rho = \rho_0(1+\delta_0)$ 、ハッブルパラメータを $H = 8\pi G \rho_0/3$ とすると、その質量に対するシュワルツシルト半径 R_{sch} は、

$$\begin{aligned} R_{\text{sch}} &= \frac{2GM_{\text{Uni}}}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H}\right)^3 \rho \\ &= \frac{2G}{c^2} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H}\right)^3 \cdot \frac{3(1+\delta_0)H^2}{8\pi G} \\ &= \frac{c(1+\delta_0)}{H} \sim \frac{c}{H}, \end{aligned} \quad (3.2,20)$$

で表すことができる。この時刻の Jeans 長 R_J は不等式 (3.2,16) で用いたように,

$$R_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}} = \frac{c}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{8\pi^2}{3H^2(1+\delta)}} = \frac{\pi c}{3H} \sqrt{\frac{8}{1+\delta}} \sim \frac{c}{H}, \quad (3.2,21)$$

となる。よって大雑把にはこの 2 つのスケールは同程度になっていることが伺える。すなわち、初期宇宙において一旦ホライズンスケールで重力崩壊し始めた宇宙はそのままブラックホールへ潰れ込み、PBH を形成することがわかった。

以上の議論から、PBH の面白い特徴が見えてくる。それは、PBH の質量が過密度ゆらぎがホライズンインしてきた時刻における宇宙の全質量程度であるということである。言い換えれば、PBH の質量は形成時刻によって変わるのである。結果的に PBH のとりうる質量範囲は非常に広い。

3.3 Scale of the perturbation forming PBHs

前の 3.2 節にて、PBH の質量は重力崩壊を開始する際の宇宙の全質量程度であることを説明した。これを逆に読み替えると、PBH の質量を指定すると、その PBH を形成するゆらぎのスケール、つまりその PBH が形成される当時のホライズンスケールや時刻を求めることができることがわかる。ここでは、一例として質量が $1M_\odot$ の PBH が形成された時刻と当時のホライズンスケールの波数を見積もってみる。

PBH が形成された時刻での共動ホライズンスケールの波数を k_{PBH} とすると、その時刻のスケール因子 a とハッブルパラメータ H を用いて

$$k_{\text{PBH}} = a_{\text{PBH}} H(a_{\text{PBH}}), \quad (3.3,1)$$

と表すことができる。その時刻の宇宙が放射優勢期であったとすると、当時のエネルギー密度は現在の臨界密度 ρ_{c0} を用いて

$$\rho(a_{\text{PBH}}) = \Omega_r \rho_{c0} a_{\text{PBH}}^{-4}, \quad (3.3,2)$$

と表すことができる。今回は PBH 形成時の宇宙の全質量 M_{Uni} が $1M_\odot$ であるとしているので、

$$M_{\text{Uni}}(a_{\text{PBH}}) \sim \rho(a_{\text{PBH}}) H(a_{\text{PBH}})^{-3} = 1M_\odot, \quad (3.3,3)$$

である。この式に $H(a) \sim \sqrt{\rho(a)}/M_{\text{pl}}$ を用いると、

$$\sqrt{\rho(a_{\text{PBH}})} \sim \left(\frac{M_{\text{pl}}^3}{1M_\odot} \right)^{1/2}, \quad (3.3,4)$$

が得られる。以上より

$$\begin{aligned}
k_{\text{PBH}} &= \left(\frac{\Omega_r \rho_{c0}}{\rho(a_{\text{PBH}})} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho(a_{\text{PBH}})}{M_{\text{pl}}^2} \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{\Omega_r \rho_{c0} \rho(a_{\text{PBH}})}{M_{\text{pl}}^4} \right)^{1/4} = \left(\frac{\Omega_r \rho_{c0}}{M_{\text{pl}}^4} \right)^{1/4} \left(\frac{M_{\text{pl}}^6}{1M_{\odot}^2} \right)^{1/4} \\
&= \left(\frac{\Omega_r \rho_{c0} M_{\text{pl}}^2}{1M_{\odot}^2} \right)^{1/4} \tag{3.3,5} \\
&\sim \left(\frac{10^{-5} \cdot 10^{11} M_{\odot} \text{Mpc}^{-3} \cdot 10^{-8} \text{kg} \cdot 10^{57} \text{Mpc}^{-1}}{10^{30} \text{kg}} \right)^{1/4} \\
&\sim 10^{6-7} \text{Mpc}^{-1} \sim 10^{0-1} \text{pc}^{-1},
\end{aligned}$$

が得られる。よって、 $1M_{\odot}$ の PBH をつくる宇宙のホライズンスケールはおよそ 1pc であることがわかる。

この時の時刻 t_{PBH} は

$$t_{\text{PBH}} \sim \frac{1\text{pc}}{3.0 \times 10^8 \text{m/s}} \sim 10^8 \text{sec}, \tag{3.3,6}$$

であり、これはおおよそビッグバン元素合成後の放射優勢期であることがわかる。これらを、以下の宇宙年齢と宇宙のエネルギースケールの関係式

$$t_{\text{Uni}} \sim 1\text{sec} \left(\frac{T_{\text{Uni}}}{1\text{MeV}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.3,7}$$

を用いて当時のエネルギースケールに焼きなおすこともできる。

以下に、まとめとして PBH の質量と形成時刻の宇宙のエネルギースケールの関係性を書き表しておく。これは、表 2.1 と見比べるとわかりやすいと思う。(ただし密度やハッブルパラメータ、そして温度の引数 a_{PBH} の代わりに添え字 $_{\text{PBH}}$ をつけている.)

$$\begin{aligned}
M_{\text{PBH}} &\sim \rho_{\text{PBH}} (H_{\text{PBH}}^{-1})^3 \sim M_{\text{pl}}^2 t_{\text{PBH}} \sim \frac{M_{\text{pl}}^3}{T_{\text{PBH}}^2} \\
&\sim 10^{15} \text{g} \left(\frac{T_{\text{PBH}}}{3 \times 10^8 \text{GeV}} \right)^{-2} \sim 30M_{\odot} \left(\frac{T_{\text{PBH}}}{40\text{MeV}} \right)^{-2}. \tag{3.3,8}
\end{aligned}$$

3.4 PBH abundance

統計的に PBH の形成量を考えるときは、基本的に Press-Shechter 理論を用いてハロー形成と同様に考える。質量 M 以上の PBH が形成されるラグランジュ座標領域の割合(確率)は

$$P_{>\delta_c}(M) = 2 \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta_M P(\delta_M), \tag{3.4,1}$$

で与えられる。ここで $P(\delta_M)$ は物質のパワースペクトルではなく、ゆらぎ δ_M のラグランジュ座標における分布関数であり

$$P(\delta_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma^2(M)}\right), \quad (3.4,2)$$

で与えられる量であることに注意が必要である。ここで重要なのは、この量が質量 M 以上の PBH が形成される割合であるという部分である。

それゆえ質量 M の PBH が形成される割合は、この $P_{>\delta_c}(M)$ から $P_{>\delta_c}(M + dM)$ を引いた値である。この値は、しばしば PBH の分野で $\beta(M)$ と書かれる。

$$\beta(M) = P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM). \quad (3.4,3)$$

ラグランジュ座標で物質の質量は一様に分布するので、 $\bar{\rho}_0(P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM))$ は、質量範囲が M から $M + dM$ にある PBH の単位共動体積中における全質量に対応する。このような PBH の数密度を $\tilde{n}_{\text{PBH}}dM$ と定義する。そうすると、得られた全質量は $\tilde{n}_{\text{PBH}}MdM$ と書くこともできる。

以上より

$$\tilde{n}_{\text{PBH}}(M)MdM = \bar{\rho}_0(P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM)), \quad (3.4,4)$$

$$\Leftrightarrow \beta(M) = \frac{\tilde{n}_{\text{PBH}}(M)MdM}{\rho_0}, \quad (3.4,5)$$

と書くことができる。また、PBH の密度パラメータとしてしばしば Ω_{PBH} が使われる。このパラメータはもし PBH の質量関数がデルタ関数であったとすると

$$\Omega_{\text{PBH}} = \frac{Mn_{\text{PBH}}}{\rho_c}, \quad (3.4,6)$$

と求めることができる。PBH の質量関数がデルタ関数ではないとすると

$$\Omega_{\text{PBH}} = \int d\ln(M)\beta(M), \quad (3.4,7)$$

と求めることができる。PBH の存在量を考える際、 f_{PBH} というパラメータが頻繁に使われる。これは

$$f_{\text{PBH}} = \frac{\Omega_{\text{PBH}}}{\Omega_{\text{DM}}}, \quad (3.4,8)$$

と定義される量で、DM(厳密には CDM) の存在量に対する PBH の存在量の比を表している。また、PBH の質量ごとに

$$f_{\text{PBH}}(M) = \frac{1}{\Omega_{\text{CDM}}} \frac{d\Omega_{\text{PBH}}(M)}{d\ln M} = \frac{\beta(M)}{\Omega_{\text{CDM}}}, \quad (3.4,9)$$

と書くこともできる。

3.5 Extended mass function

先ほどの 3.4 節では、ホライズンインしてきた原始密度ゆらぎが重力崩壊することにより、その宇宙全体が重力崩壊し PBH が形成されると考えてきた。言い換えれば、当時の宇宙の質量がそのまま PBH の質量であるとして考えてきた。しかし先行研究 [32, 33, 34, 35, 36] にて、球対称崩壊の近似の元、形成される PBH の質量のホライズンインしてきた原始密度ゆらぎの大きさ δ_M と宇宙の質量に対する依存性は、 $\delta > \delta_c$ の際、下記の重要なスケーリング関係に従うことが示されている。(ここで、 δ_M は PBH が形成された場所での共動ゲージによって定義される密度である。)

$$M = AM_H(\delta_M - \delta_c)^\gamma. \quad (3.5,1)$$

ここで、比例定数 A と重力崩壊閾値 δ_c 、そしてべき乗の肩である γ は PBH を形成するゆらぎがホライズンインしてきた際の宇宙流体の状態によっている [37]。先行研究 [38, 39, 37] での数値計算によると、放射優勢期においておよそ $A = 3.3$ 、 $\gamma = 0.36$ 、 $\delta_c = 0.453$ となることがわかっている。

ここでは簡単のため、 δ_c のみが宇宙流体の状態方程式に依存している状況を考えよう。式 (3.5,1) は以下のように書き直すことができる:

$$\delta_M = \left(\frac{M}{kM_H} \right)^{1/\gamma} + \delta_c. \quad (3.5,2)$$

それゆえ、宇宙の全質量と PBH を形成する質量の比を考慮し、式 (3.4,3) で定義される β の表記は以下のように修正される。

$$\beta = 2 \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{M}{M_H} P(\delta_M) d\delta_M = 2 \int_{\delta_c}^{\infty} A(\delta - \delta_c)^\gamma P(\delta_M) d\delta_M. \quad (3.5,3)$$

そして式 (3.4,9) に式 (3.5,3)(3.5,2) を代入することで、最終的な f_{PBH} の表記は PBH の質量 M と密度ゆらぎの分散 σ^2 を用いて以下のように書き表される [40]。

$$f_{\text{PBH}}(M) = \frac{1}{\Omega_{\text{CDM}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M_H)}} \exp \left[-\frac{(\mu^{1/\gamma} + \delta_c(M_H))^2}{2\sigma^2(M_H)} \right] \frac{M}{\gamma M_H} \mu^{1/\gamma} \sqrt{\frac{M_{\text{eq}}}{M_H}} d\ln M_H, \quad (3.5,4)$$

ここで添字 $_{\text{eq}}$ は物質放射等密度時、 $\mu = M/kM_H$ であり、さらに $d\delta_M/d\ln M = \mu^{1/\gamma}/\gamma$ であることを用いた。

式 (3.4,9) より、PBH の密度パラメータ Ω_{PBH} は

$$\Omega_{\text{PBH}} = \Omega_{\text{CDM}} \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} f_{\text{PBH}}(M) d\ln M, \quad (3.5,5)$$

により与えられる。ここで M_{\max} と M_{\min} はそれぞれ作りうる PBH の最大質量と最小質量である。

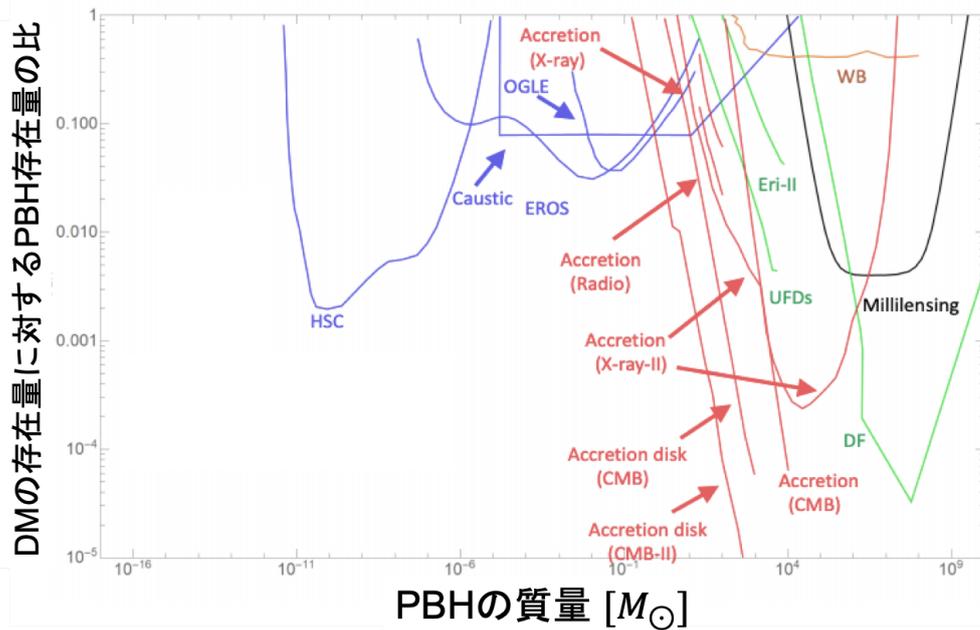


図 3.1 DM の存在量に対する PBH の存在量の比 f_{PBH} vs PBH の質量. (PBH の質量分布関数としてデルタ関数を採用している.) 青い曲線は EROS [42], OGLE [43], Kepler [44], HSC [45, 46] そして Caustic [47] による重力レンズ効果からの制限を表している. オレンジの線はコンパクト天体が存在することで得られる動的な制限である. 白色矮星と中性子星からの制限は, 合意が得れていないためここには載せていない. (3.6.6 節を参照せよ.) 緑の曲線は PBH による動的摩擦 (DF) [48], ultra-faint 矮小銀河における星の分布 (UFDs) [49], そして エリダヌス II による星の分布 (Eri-II) [49] を表している. 赤い曲線は PBH へのガス降着から得られる制限を表している. 例えば, バリオンガスの音速がバリオン-DM 相対速度よりも早い場合 (CMB) と遅い場合 (CMB-II) において, ガス降着が球状降着の際の CMB への影響 [50] から得られた制限や降着円盤を持つ際の CMB への影響 [51] から得られた制限, そして電波・X 線観測から得られた制限 [52, 53] を載せている. ([41] から引用, 改変)

3.6 PBH abundance constraint

PBH の存在量を見積もることの重要性は 3.1 節で紹介した通りで, これまで数多くの研究が行われてきた. 現在得られている PBH の質量ごとの存在量への制限は図 3.1 にまとめられている [41]. 以下で登場する f_{PBH} は式 (3.4,8) で定義されている量であり, DM の存在量に対する PBH の存在量の比を表す量である.

3.6.1 Observation constraints on PBHs

ここでは, レビュー論文 [41] と論文 [54] をもとに, PBH の存在量 f_{PBH} に制限を設ける手法を紹介する. 前者の論文は PBH の存在量制限に対する手法を網羅的にまとめてあるのに対し, 後者

は小惑星程度の質量帯の PBH に対する f_{PBH} 制限の再考, そして俗に言う”PBH window”を主張している論文になっている. また, ”PBH window”に関連した話題である有限サイズ効果 (finite source size effect) と波動効果 (wave optics effect) に関しては, 論文 [46] にまとめられているので興味がある人は参考にしてほしい.

まずはじめに大きく分けて”蒸発済み”PBH と”蒸発していない”PBH の 2 種類の PBH がいることを説明する必要がある. ここでいう”蒸発”とはホーキング放射によるブラックホールの蒸発のことである. PBH が宇宙の十分初期で作られたことを考えると, 宇宙年齢の見積もりから PBH はおよそ 138 億年程度の年月を経てきたことが伺える. PBH はブラックホールであるため, この間温度 T_{Haw} での黒体放射 (ホーキング放射) を放出し続ける. よって, ある程度軽い PBH は宇宙年齢のうちに自身の質量に相当する量のエネルギーを放出しつくしてしまうのである. これがホーキング放射によるブラックホールの蒸発と呼ばれる現象である.

宇宙年齢のうちに蒸発してしまう PBH の質量を見積もってみよう. 以下の議論は一般のブラックホールにも成り立つ話である. 半径 R で質量 M , 温度 T の黒体が 1 秒間あたりに放出するエネルギーは, ステファンボルツマン定数 σ_{SB} を用いて

$$\sigma_{\text{SB}}T^4 \times 4\pi R^2, \quad (3.6,1)$$

と求めることができる. 仮にこの黒体が宇宙の年齢分エネルギーを放出し続けた時, その放出したエネルギーが自身の静止質量エネルギーを超えないためには

$$M \geq \sigma_{\text{SB}}T^4 \times 4\pi R^2 \times H_0^{-1}, \quad (3.6,2)$$

の条件を満たす必要がある.

ホーキング放射の温度式

$$T_{\text{Haw}} \sim \frac{1}{GM}, \quad (3.6,3)$$

とシュワルツシルト半径

$$R \simeq 2GM, \quad (3.6,4)$$

を用いて, この黒体が PBH であると考え, 質量 M の PBH が現在も蒸発せずに存在し続ける条件は

$$M \geq 10^{15}[\text{g}], \quad (3.6,5)$$

となる [55]. よって, $10^{15}[\text{g}]$ より軽い PBH はすでに蒸発してしまい現在存在していないのだが, これらがもしも過去に存在していた場合, 質量に対応していくつかの痕跡を宇宙に残すことが知られている. PBH の質量 M と対応する宇宙の痕跡は以下の表 3.1 の通りである.

これらの蒸発済み PBH が宇宙に残す痕跡を観測から見積もることで, $10^{15}[\text{g}]$ より軽い PBH が過去にどれだけ存在していたか, 存在量に制限を設けることが可能である. ただしこれらの PBH

| PBH 質量 [g] | 宇宙に残す痕跡 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| $10^4 < M < 10^9$ [g] | 非常に軽い超対称性粒子 |
| $10^6 < M < 10^9$ [g] | 初期宇宙におけるエントロピー生成 |
| $10^9 < M < 10^{13}$ [g] | BBN における軽元素存在量への影響 |
| $10^{13} < M < 10^{14}$ [g] | 宇宙の再電離史の変更による小スケール CMB 温度ゆらぎ等方化 |
| $10^{14} < M < 10^{15}$ [g] | 銀河系外背景光子の増加 |

表 3.1 蒸発済み PBH が存在していた場合、宇宙に残る痕跡

は現在存在していないため、この質量帯の PBH で現存の DM を説明できないことには注意が必要である。

次に蒸発していない PBH の存在量への制限を見ていこう。こちらは得られた存在量制限がそのまま DM を説明できるかどうか直結するため非常に重要である。PBH の存在量への制限方法として大きく分けて 2 種類存在する。それは直接的手法と間接的手法である。直接的手法による PBH の存在量制限とは、PBH が自身の重力ポテンシャルによってもたらず観測可能な効果を調査することで得られる制限のことである。それゆえ、PBH の形成機構には依存していない制限である。この直接的手法はさらに 4 つの分類：(1) 重力レンズ、(2) 動的効果、(3) ガス降着、(4) 大規模構造進化に分けることができる。間接的手法による PBH の存在量制限とは、PBH 自身ではなく PBH に深く関わっている何かによって引き起こされる観測可能な効果によって得られる制限である。このような制限は全ての PBH 形成シナリオに適用することはできないが、該当する PBH の存在可能性を排除するとき有用になりうる。

以降、さきほど触れた観測的制限を説明していくのだが、その前に 2 つ言及しておきたいことがある。1 つ目は以降の PBH 存在量への制限を議論する際に、PBH の質量は単一、つまり質量関数にデルタ関数を用いているということである。一般的な質量分布関数を仮定する際の話は、本論文では触れないが、基本的にそのような質量関数を用いて見積もった制限は、デルタ関数型の質量分布関数を用いた場合よりも弱くなる、ということは一言付け足しておこう。2 つ目は、現存の存在量制限は日々更新されていっているということだ。更新のされ方は主に 2 種類あり、既存の手法をより正確に計算する場合と 21cm 観測のような新しい観測データを用いて新しい手法で制限を設ける場合がある。

3.6.2 Gravitational lensing

PBH を発見もしくは PBH の存在量に制限を設ける際に、重力レンズ効果は非常に強力な手法である。重力レンズ効果の見事な点は、個々のシグナルが対象の重力物理にしか依らず、のちに紹介するような PBH とその周辺物質の間の相互作用による不確定要素に影響されないということである。

もし PBH が宇宙に存在していた場合、それらは星などの背景天体の光に対して重力レン

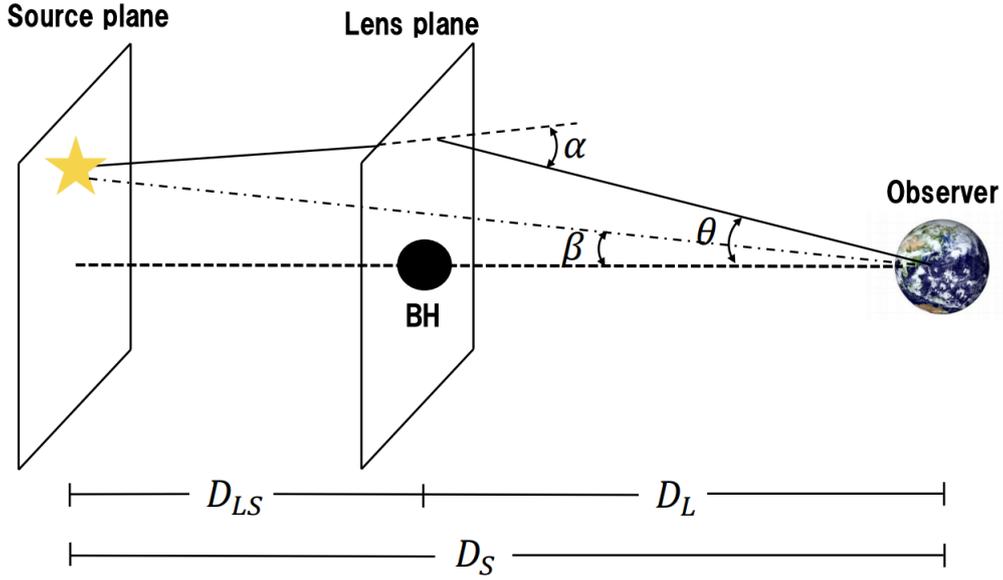


図 3.2 重力レンズ効果が生じている時の光の軌跡. α は歪み角度である. 論文 [41] から引用.

ズ効果を引き起こすだろう. レンズ面上の点で生じる光偏向に対して薄レンズ近似 (thin lens approximation) を用いると, レンズ方程式は以下のように書くことができる. (図 3.2)

$$\theta D_S = D_S \beta + D_{LS} \alpha, \quad \alpha = \frac{4GM_{\text{BH}}}{D_L \theta}. \quad (3.6,6)$$

ここで $r \equiv D_L \theta$ で定義されるレンズ面上での距離を表す変数を導入すると, レンズ方程式 (3.6,6) は

$$r^2 - r_0 r - R_E^2 = 0, \quad (3.6,7)$$

と書き直すことができる. ここで $r_0 = D_L \beta$, そして $R_E = \sqrt{4GM_{\text{BH}} D_L D_{LS} / D_S}$ はアインシュタイン半径である. これゆえ, レンズ効果を受けた時の像の位置は

$$r = \frac{1}{2} \left(r_0 \pm \sqrt{r_0^2 + 4R_E^2} \right), \quad (3.6,8)$$

で与えられる. ここで r の解が2つあることに注意する. 唯一の例外は, 観測者・レンズ天体・光源の3つが同一直線上にある場合 ($\beta = 0$) であり, この時 r は重解になる. この場合, レンズ面上の像は半径 R_E の円状になり, これはアインシュタインリングと呼ばれる. レンズ効果は $r_0 \leq R_E$ の際に強く効き, 2つの像間の典型的な見かけの角度は

$$\Delta \sim \frac{R_E}{D_L} = \sqrt{\frac{4GM_{\text{BH}}}{D_S} \frac{1-x}{x}} \approx 0.3 \text{ ミリ秒角} \left(\frac{M_{\text{BH}}}{10M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{D_S}{100\text{kpc}} \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \quad (3.6,9)$$

である. ここで $x \equiv D_L / D_S$ で定義される新しいパラメータを導入した.

3.6.3 Microlensing

重力マイクロレンジングはコンパクト天体による重力レンズ効果のことである。像の見かけの角度が非常に小さく、個々の像を望遠鏡により分解できない、という特徴を持つ [56]。例えば、式 (3.6,9) で与えられる見かけの角度が、MACHO Project や EROS collaboration の角度分解能 (約 0.6 秒角) に比べてずっと小さい場合に生じる。重力マイクロレンズ現象において、我々が観測するのは元の光源というよりむしろ 2 つの像の重ね合わせである。マイクロレンズ効果がなかった場合を 1 に規格化した、強度倍率因子 A は

$$A = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}, \quad u = \frac{r_0}{R_E}, \quad (3.6,10)$$

で与えられる。 $r_0 = R_E$ の時に、 $A = 1.34$ である。レンズ天体が観測者と光源に沿った視線方向に対して相対的に動いていた場合、式 (3.6,10) 中の u は時間依存し、それに伴い A も時間依存する値となる。視線方向状の一定速度 v_{PBH} を仮定すると、 u を

$$u^2 = \frac{v^2 t^2 + b^2}{R_E^2} = \frac{v^2 t^2}{R_E^2} + u_{\text{min}}^2, \quad (3.6,11)$$

と書き表すことができる。ここで b は光源のレンズ面上でのインパクトパラメータであり、基準時刻 $t = 0$ はレンズ面上の光源の像がレンズ天体に最も近づいた時刻にとっている。 u_{min} を変えた場合の様々な強度曲線を図 3.3 に載せておく。

図 3.3 から分かるように、強度曲線は $t = 0$ を最大値とする対称的な形をしている。強度の上昇、効果に対する時間スケールは

$$T = \frac{R_E}{v} = \frac{\sqrt{4GM_{\text{PBH}}D_S x(1-x)}}{v} \approx 2 \text{ yr} \sqrt{x(1-x)} \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{D_S}{100\text{kpc}} \right)^{1/2} \left(\frac{v}{200\text{km/s}} \right)^{-1}, \quad (3.6,12)$$

で与えられる。この式より、この時間スケールは光源からの距離が遠ければ遠いほど、またレンズ天体の質量が重ければ重いほど長くなることがわかる。

重力マイクロレンズ効果の文脈で有用な量として、光学的厚み τ があげられる [57, 58]。この量は、背景光源の光が $A = 1.34^{*1}$ よりも大きな強度因子でコンパクト天体からマイクロレンズ効果を受ける可能性を測定する量である。言い換えれば、(確率の最大が 1 なので) 光学的厚みが 1 より小さい場合、これは光源からの光がレンズ面上のアインシュタイン半径によって描かれる円の内側を通る確率を表している。レンズ天体が全て同じ質量を持っていると仮定すると、光学的厚みは以下のように書き表すことができる。

$$\tau = \int_0^{D_S} dr n_{\text{PBH}}(r) \pi R_E^2(r) = 4\pi G \int_0^{D_S} dD_L \rho_{\text{PBH}}(D_L) \frac{D_L(D_S - D_L)}{D_S}, \quad (3.6,13)$$

*1 $A = 1.34$ という閾値は実際には個々の観測機器における観測手法によるものである。 $A = 1.34$ は、 $r_0 = R_E$ の時の強度因子の値として便利な指標となるという理由から導入されているだけである。

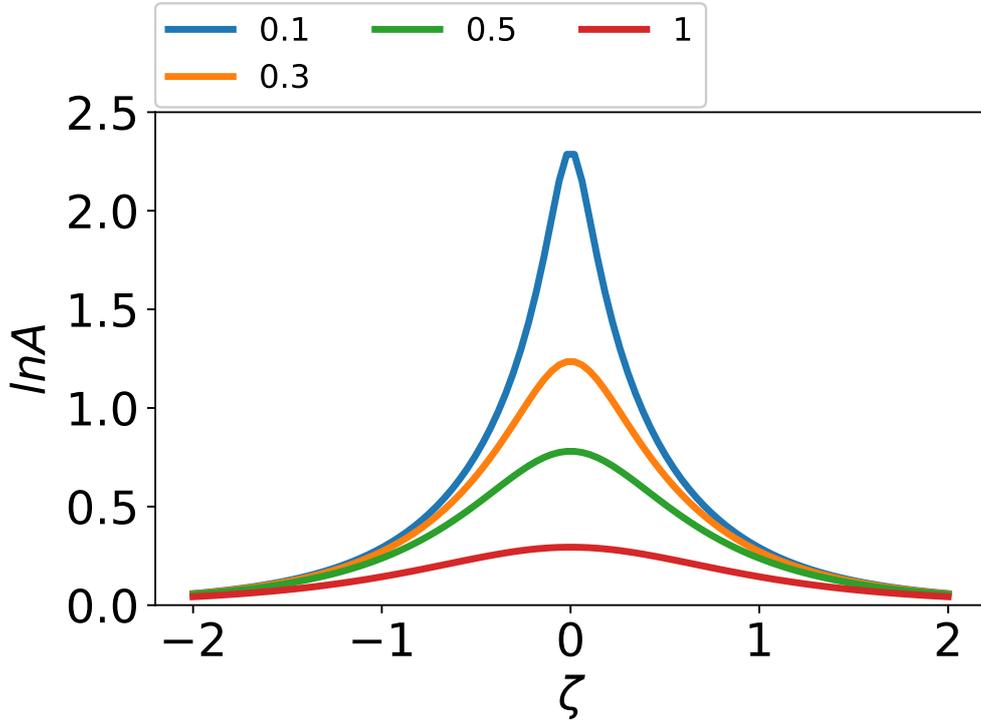


図 3.3 $u_{\min} = (0.1, 0.3, 0.5, 1)$ にとった場合の強度曲線 vs 時間. 時間の変数としては $\zeta = vt/R_E$ の無次元量を用いている.

ここで, $\rho_{\text{PBH}} = M_{\text{PBH}} n_{\text{PBH}}$ は PBH のエネルギー密度である. 面白いことに, 式 (3.6,13) 中の最後の τ の表現は, PBH の質量に陽に依存していない. 光学的厚みは PBH が DM のエネルギー密度のうちどの程度を担っているのかということにしか依存していないのだ. 1986 年, Paczyński がマゼラン雲中の数百万個の星々を観測し続けることで, DM 中のうちどの程度の割合の質量がコンパクト天体の形で存在しているのかを見積もることが可能であると主張する論文を発表した [59]. マゼラン雲中のどの星からの光も我々のもとに届くまでの間に天の川銀河中の DM ハローを通過してくるのである. もし全 DM のうち, いくつかの割合かがコンパクト天体として存在していた場合, マゼラン雲中の光源からの光に対してマイクロレンズ効果を生じさせるであろう. 先行研究 [59] 中の見積もりによると, マイクロレンズ効果による光学的厚みは,

$$\tau \sim 10^{-6} f_{\text{PBH}}, \quad (3.6,14)$$

与えられる. つまり, もし $f_{\text{PBH}} \sim 1$ である場合, 100 万個 (10^6 個) の星々のうち 1 つの星には (確率的に) 必ずマイクロレンズ効果が生じる計算になる. 言い換えれば, マイクロレンズ効果が観測されなければ PBH の存在量に対して上限を設けることができる. 式 (3.6,12) より, 強度変化の時間スケールは, PBH の質量が $M_{\text{PBH}} = 10M_{\odot}$ の時およそ 2 年であり, $M_{\text{PBH}} = 10^{-6}M_{\odot}$ の時お

よそ 400 分である。これゆえ、数年間におけるマゼラン雲中の星の観測からおよそ $M_{\text{PBH}} \sim 10M_{\odot}$ までの質量帯の PBH に対して、存在量の上限を設けることができる。

ここで、存在量の制限を設けることができる PBH の質量に下限があることを言及しておく。これは、非常に小さいレンズ天体からのマイクロレンズ効果による強度増加を考える際に光源の有限サイズ効果や重力レンズ効果における波動効果を考慮しなければならないことからくる下限である。有限サイズ効果とは、レンズ面上に射影される光源の角度サイズがインパクトパラメータの角度サイズ θ_0 に匹敵する、もしくはこれより大きい場合に顕著に効いてくる効果である。ピークの強度倍率は射影された光源の角度サイズと θ_0 の関係に応じてレンズ天体を点近似した場合の倍率よりも大きくなったり小さくなったりする [60]。特に、 θ_0 が射影された光源の見かけの角度よりもはるかに小さい場合、 A の最大値は

$$A_{\text{max}} = \frac{\sqrt{4+r^2}}{r}, \quad r = \frac{xR_{\text{star}}}{R_E}, \quad (3.6,15)$$

となる。これゆえ、 A_{max} は $r \geq 1$ の際に 1 に近づく。レンズ天体の質量に換算すると、 $r \geq 1$ という条件は

$$M_{\text{PBH}} \lesssim \frac{D_L R_{\text{star}}^2}{4GD_S^2} \sim 3 \times 10^{-9} M_{\odot} \left(\frac{R_{\text{star}}}{R_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{D_L}{10\text{kpc}} \right) \left(\frac{D_S}{100\text{kpc}} \right)^{-2} \quad (3.6,16)$$

と書き直すことができる。レンズ天体の質量がこの不等式を満たしていた場合、強度倍率はレンズ天体を点近似する場合よりもはるかに抑えられてしまう。

3.6.4 Millilensing

$M_{\text{PBH}} \geq 10^6 M_{\odot}$ を満たすような超大質量 PBH に対しても重力レンズ効果による検出対象になる。(PBH である必要はないが、) 宇宙に存在する超大質量コンパクト天体は宇宙論的な距離離れた位置に見かけの角度がミリ秒角スケールの 2 つの光源の像を生成する。これゆえ、ミリレンジングと呼ばれている。先行研究 [61] にて Press と Gunn は超長基線電波干渉法 (Very Long Baseline Interferometry: VLBI) マップを用いることでこのような 2 つの像を分解することができることを主張し、さらにそのような現象が起きる確率を見積もった。また、先行研究 [62] では、48 のコンパクト電波源 (compact radio sources) の VLBI 観測により、アインシュタインドジッター宇宙の仮定のもと、 $10^7 M_{\text{PBH}} < M_{\text{PBH}} < 10^9 M_{\text{PBH}}$ の PBH に対して $f_{\text{PBH}} < 0.2(95\% \text{CL})$ という制限を得た。その後、300 個のコンパクト電波源の VLBI 観測を用いて再調査した [63] が、ミリレンジングの証拠は見つからなかった。これゆえ、 $10^7 M_{\text{PBH}} < M_{\text{PBH}} < 10^9 M_{\text{PBH}}$ の広い質量帯の PBH に対して、 f_{PBH} に対する強い制限が付いている。(図 3.1 参照。)

3.6.5 Femtolensing

2017 年までは、 $10^{-16} M_{\odot} < M_{\text{PBH}} < 10^{-13} M_{\odot}$ のような質量は非常に小さいがまだ蒸発していない PBH に対しても重力レンズ効果が有用であり、 f_{PBH} に対して厳しい制限を設けることが

できると考えられていた。しかし、先行研究 [64] により光源の有限サイズ効果や重力レンズの波動効果を再考すると、この質量帯の PBH に対して重力レンズ効果から制限を設けることが難しいことが主張されている。

3.6.6 Dynamical constraints

PBH は重力相互作用により天体物理学的にもいくつかの影響を及ぼす。これらの影響の大きさを見積もり、観測との比較を行うことで、広い質量帯の PBH に対して f_{PBH} の制限を設けることが可能である。

3.6.6.1 Disruption of white dwarfs

白色矮星は太陽程度の質量を持ち、地球と同程度の大きさの星である。これらの密度は非常に高いため、自己重力が主系列星よりも強く、電子の縮退圧により支えている [65]。白色矮星が例えばガス降着のより、チャンドラセカール限界質量に近づくと、星の内部で核融合が起こり、暴走核融合反応が起きる。

先行研究 [66] にて、PBH が白色矮星を通過すると、白色矮星内部での暴走核融合反応を着火させることが主張された。先行研究 [65] の主なアイデアは以下の通りである。PBH が白色矮星内を通過すると、軌道付近の全ての粒子は短時間のうちに PBH が作る重力によりエネルギーを得る。つまり、PBH は自身の運動エネルギーを失い、結果として軌道付近の粒子の温度が上がり、核融合率が大きく上昇する。(核融合率は基本的に温度に強く依存している。) 熱の散逸のタイムスケールが核融合が生じるタイムスケールよりも長い場合、核融合が起きることでエネルギーを放出し PBH の軌道から離れた場所の温度も加熱される。熱散逸は大きな体積になればなるほど非効率的になるので、核融合は促進され最終的に爆発が起きる。

これゆえ、もしとある質量よりも大きい PBH が多数存在している場合、対応する質量を持つ白色矮星は現在の宇宙に存在できなくなってしまうであろう。言い換えれば、我々は白色矮星の観測を通じて PBH の存在量に制限を設けることができる。しかし、この手法による存在量制限は PBH の全ての質量帯に有効である訳ではない。例えば、軽い PBH の場合重力が弱いので、白色矮星を十分加熱することができない。また重すぎる PBH の場合は衝突確率が低すぎるためこのような現象が起きなくなってしまう。また、超新星爆発の発生率の観測から PBH の存在量に制限を設けることも可能ではあるが、こちらは白色矮星の観測での制限 [66] に比べ、不確定性要素が多く Robust な制限であるとは言えない。

また、近年 PBH が通ることによる衝撃波の前後での温度進化をシミュレーションし、本当に白色矮星の核融合を着火させるのか、また本当に暴走核融合反応が起こり爆発するのかを再調査した結果、白色矮星の観測からは PBH の存在量に制限を設けることができないと主張している先行研究 [54] も存在する。

3.6.6.II Disruption of neutron stars

中性子星は白色矮星よりもはるかにコンパクトで高密度な星である。その密度はおよそ原子核密度と同等であり、自己重力の大半を中性子の縮退圧で支えている。中性子星に関しても少しだけ方法が異なるが、先ほどの 3.6.6.I 節のアイデアの元、PBH の存在量に制限を設けることができる。

白色矮星の場合と同様、PBH は中性子星を通過する際、動的摩擦によって自身の運動エネルギーを失う。PBH が中性子に与える効果は先行研究 [67] にて調べられている。先行研究 [67] によると、PBH から中性子星に運ばれるエネルギーは

$$\frac{E_{\text{loss}}}{M_{\text{PBH}}} \approx 6.3 \times 10^{-12} \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10^{22}\text{g}} \right), \quad (3.6,17)$$

である。もしこのエネルギーが PBH の持っている運動エネルギーよりも大きい場合、PBH は中性子星を重力的に束縛される。1 回目の通過後、PBH は続いて周期振動をはじめ、半振動周期ごとに中性子を通過して運動エネルギーを渡し、次第にエネルギーを失っていく。ある程度振動した後、最終的に PBH は中性子内に束縛される。これが起きるタイムスケールは、先行研究 [67] より

$$t \sim 4 \times 10^4 \text{yr} \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10^{22}\text{g}} \right)^{-3/2}, \quad (3.6,18)$$

である。一度 PBH が中性子の内側に入ると、途端に中性子内の物質は PBH に落ち込み、中性子は破壊される [68]。これゆえ、中性子星は PBH に頻繁に出会ってはいけないことになり、このことから PBH の存在量に上限を設けることが可能である。

式 (3.6,17) は速度の遅い PBH ほど中性子星に束縛されやすいことを示している。PBH の典型的な速度分散がおよそ $\sim 10\text{km/s}$ である球状星団の中心にある中性子星の観測から PBH の存在量に対して強い制限を設けることができることが、先行研究 [67] で主張されている。しかしながらこの制限は、PBH が DM として球状星団の中心に存在することを仮定しており、そのような場所に DM が存在するのかどうか観測ではいまだわかっていないことは心に留めておかなければならない。同様の現象を用いて、PBH のエネルギーロスの見積もりからより強い制限が得られたと主張する論文 [69] もあるが、続けてこの論文の主張を否定する論文 [70, 71] が出ている。

上で引用した論文は f_{PBH} に対して上限を課している一方、 $10^{-14}M_{\odot} < M_{\text{PBH}} < 10^{-8}M_{\odot}$ の質量帯の PBH が DM のうち数 % の割合で存在していることで観測されている r 過程の元素の存在量を説明できることを示唆している論文 [72] も存在する。

3.6.6.III Disruption of wide halo binaries

Wide halo binary (WB) は銀河ハロー内に存在する、2 つのハローの距離が離れた ($\mathcal{O}(1)\text{pc}$ でも可能) 連星である。束縛エネルギーが弱いため、PBH に出会うと WB は壊されやすい傾向にある。これゆえ、WB を観測することで PBH の存在量に制限を設けることが可能である。

複数の PBH が WB の付近を断続的に通り*2、エネルギーをこの連星に輸送するような状況を考

*2 雨が降るように PBH が降ってくるようなイメージ。

えよう．ここで，WB の軌道長半径と質量をそれぞれ a と m_b と表すことにする．PBH が通り過ぎることにより受けとるエネルギーの量がこの連星の束縛エネルギーよりも大きかった場合，WB は分裂する．もし，一回の遭遇により WB が壊されたとすると，この分裂は壊滅的状态であるという (catastrophic regime)．一方，もし WB が複数回の遭遇により個々の小さなエネルギー輸送の積み重ねで壊された場合，この分裂は拡散的状态にあるという (diffusive regime) [73]．文献 [73] によると，壊滅的分裂と拡散的分裂のタイムスケールは以下の通りである．

$$t_{d,\text{cat}} \simeq 0.07 \frac{m_b^{1/2}}{G^{1/2} \rho_{\text{PBH}} a^{3/2}}, \quad t_{d,\text{diff}} \simeq 0.002 \frac{V m_b}{G M_{\text{PBH}} \rho_{\text{PBH}} a}, \quad (3.6,19)$$

ここで， V はこの連星と PBH の相対速度である．この 2 つのタイムスケールが一致するときの PBH の質量はおよそ

$$M_{\text{PBH,c}} \simeq 30 M_{\odot} \left(\frac{m_b}{2 M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{10^4 \text{AU}} \right)^{1/2} \frac{V}{200 \text{km/s}}, \quad (3.6,20)$$

で与えられる．この質量より重たい場合，PBH は一回の遭遇で WB を分裂させることができる．逆にこれより軽い場合，WB を複数回の遭遇により分裂させることになる．大雑把に言うと，PBH の存在量への制限は，この連星の寿命よりも式 (3.6,19) で与えられるタイムスケールが長くするという条件から得ることができる．この連星に対する $t_{d,\text{cat}}$ の典型的な大きさは，式 (3.6,19) より，

$$t_{d,\text{cat}} \simeq 3 \text{Gyr} \left(\frac{m_b}{1 M_{\odot}} \right)^{1/2} f_{\text{PBH}}^{-1} \left(\frac{\rho_{\text{DM}}}{0.01 M_{\odot} / \text{pc}^3} \right)^{-1} \left(\frac{a}{0.1 \text{pc}} \right)^{-3/2}, \quad (3.6,21)$$

で与えられ，WB の年齢が宇宙年齢と同程度であることを考慮すると，これは WB の寿命よりも短い．(つまり， f_{PBH} を下げて調整する必要がある．) 式 (3.6,21) より，おおよそ $a \geq 0.1 \text{pc}$ の軌道長半径をもつ WB から f_{PBH} に意味のある上限を与えることができることがわかる．興味深いことに，壊滅的分裂のタイムスケールは PBH の質量そのものには依存しない．これゆえ，DM の存在量に対する PBH の存在量比 f_{PBH} の上限は PBH の質量に依らないことになる．一方で， $M_{\text{PBH,c}}$ よりも軽い PBH に対しては，PBH の質量が軽ければ軽いほど制限は弱くなる．

WB の存在を確かめることは非常に困難な課題である．まずそもそもほとんど存在しない上，偶然発見したとしても見分けることが難しい．先行研究 [74] では，論文 [75] 内で与えられた WB の候補連星を解析することにより，数 $100 M_{\odot}$ よりも重たい質量の PBH に対して， $d_{\text{PBH}} \leq 0.2$ という制限を設けた．その後，論文 [76] の著者らは，4 つの WB 候補連星の星の動径速度測定の結果をもとに，論文 [75] 中の 2 番目に幅広い WB 候補連星が本当に WB であるか怪しいことを指摘した．しかしながら，両天体の間隔がおおよそ 1.16pc の，最も幅広い WB 候補天体に関しては本物であることが確かめられている．それゆえ，得られる PBH の存在量制限は，論文 [74] の制限よりも弱くなってしまうが，それでもまだ論文 [74] と同様の質量帯の PBH に対して存在量の制限を設けることができる．

3.6.6.IV Disruption of globular clusters

WBでの議論をそのまま球状星団に適応することができる。両者の違いは、球状星団の方が多数の星を保有しているということである。式 (3.6,20) に球状星団の典型的な質量 m_{gc} と典型的な大きさ a_{gc} を代入すると、壊滅的分裂と拡散的分裂を分ける臨界質量が

$$M_{\text{PBH,c}} \simeq 10^5 M_{\odot} \left(\frac{m_{\text{gc}}}{10^5 M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{a_{\text{gc}}}{10 \text{pc}} \right)^{1/2} \frac{V}{200 \text{km/s}}, \quad (3.6,22)$$

と求まる。壊滅的分裂のタイムスケールは

$$t_{\text{d,cat}} \simeq 1 \text{Gyr} \left(\frac{m_{\text{gc}}}{10^5 M_{\odot}} \right)^{1/2} f_{\text{PBH}}^{-1} \left(\frac{\rho_{\text{DM}}}{0.01 M_{\odot}/\text{pc}^3} \right)^{-1} \left(\frac{a_{\text{gc}}}{10 \text{pc}} \right)^{-3/2}, \quad (3.6,23)$$

である。WBの場合同様、 $f_{\text{PBH}} \simeq 1$ の時、宇宙の年齢程度の球状星団の年齢よりも短い。これゆえ、球状星団の観測をすることで f_{PBH} に制限を設けることができる。詳しい解析は、論文 [48] を参考にしてほしい。

3.6.6.V Disruption of ultra-faint dwarf galaxies

銀河周辺にあることが知られている ultra-faint 矮小銀河とアンドロメダ銀河も PBH の存在量に制限を設けることに有用である。もし、PBH が ultra-faint 矮小銀河内にいた場合、内部の星が断続的に PBH と重力相互作用をする。2 体相互作用は個々の天体の運動エネルギーを均一化する方に働く。つまり、もし PBH が内部の星よりも重い場合、平均的に見て星々は PBH から運動エネルギーを獲得する。これは動的加熱である。結果として、PBH と星の間の相互作用を通じて、星々はより早く飛び回るようになり、次第に広く広がっていくようになる。これは星々の分布の観測に矛盾するかもしれない。

Ultra-faint 矮小銀河内の、有効半径 (half-light radius) が r_h の星団を考える。もしも星団が、多数の PBH を保有する領域に突入すると、 r_h は時間とともに増加していく。その時間進化方程式は以下の通りである [49]。

$$\frac{dr_h}{dt} = \frac{4\sqrt{2}\pi G f_{\text{PBH}} M_{\text{PBH}} \ln \Lambda}{V} \left(\alpha \frac{M_{\text{cluster}}}{\rho_{\text{DM}} r_h^2} + 2\beta r_h \right)^{-1}, \quad (3.6,24)$$

ここで V は星団に対する PBH の典型的な相対速度であり、 ρ_{DM} はトータル DM 密度である。 $\ln \Lambda \simeq 10$ はクーロン対数であり、 $\alpha \sim 0.4$ 、 $\beta \sim 10$ である。もし PBH が DM 内のサブドミナントな成分であった場合、残りの DM は別の形、例えば未知の素粒子などでなければならない。そのような場合、PBH 以外の DM は重力により星々を重力的に引っ張り、冷却させる。しかしながら、ultra-faint 矮小銀河場合に考えているような f_{PBH} の値に対して、PBH による動的加熱はこの冷却効果よりも常に効率的であることが先行研究 [49] で示されている。

先行研究 [49] では、Dark Energy Survey [77, 78] にて見つかった矮小銀河である、エリダヌス II (Eridanus II) 内の ultra-faint 矮小銀河と星団中の星の分布を調査することにより f_{PBH} の上限

を得ている。エリダヌス II は有効半径およそ $\sim 300\text{pc}$ であり、内部に $r_h = 13\text{pc}$ の星団を保有している。これらの星団や矮小銀河の初期サイズと年齢を知らないために、観測された星分布から f_{PBH} の制限に焼き直す際に不確定性が生じる。保守的な仮定のもと設けた制限が図 3.1 に載っている。図 3.1 から明らかなように、3.6.6.III 節で求めた制限よりも対応する質量帯にて強い制限が得られている。また最近では、Segue 1 矮小銀河の解析から同様の制限を導いている論文 [79] も出ている。

3.6.6.VI Dynamical friction on PBHs

もし銀河ハローの全てもしくは一部が重たい PBH で構成されていた場合、それらの一部は銀河中心にいるはずである。そのような PBH は星やより軽い PBH、もしくは素粒子から強い動的摩擦を受け、運動エネルギーを失い、螺旋状に中心へ落ちていく。もしこの下降タイムスケールが宇宙の年齢よりも短かった場合、次々と PBH が落ち続け中心領域にたまり続ける。結果として、銀河中心は PBH の集団、もしくは PBH 同士の合体によりいくつかの重たい PBH により重力的に支配される。どちらの場合にも、PBH の降着により高密度な領域が生まれる。銀河中心における質量の上限から、いくつかの質量帯の PBH に対して銀河ハロー内の PBH 存在量を制限することができる。

PBH が周囲の物質中を動き周り速度が減少していく割合は以下の通りである [73]。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{4\pi G^2 M_{\text{PBH}} \rho_s \ln \Lambda}{V^2} \left(\text{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right), \quad X = \frac{V}{\sqrt{2}\sigma}, \quad (3.6,25)$$

ここで σ は周囲の物質を構成する粒子の速度分散であり、 erf はエラー関数である。今、PBH は σ 程度の速度で動くとする。その時、 $\text{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \sim 0.5$ である。これゆえ、我々は下記の式を得る。

$$\frac{dV}{dt} \simeq -\frac{2\pi G^2 M_{\text{PBH}} \rho_s \ln \Lambda}{V^2}. \quad (3.6,26)$$

この摩擦は PBH のトルクに対して効果を発揮し、PBH は次第に角運動量を失っていく。軌道は時刻ごとの角運動量に相当するケプラー運動をしていると仮定すると、半径 r での軌道速度 V は $V = \sqrt{GM_s(r)/r}$ で与えられる。ここで r は銀河中心から測った距離であり、 $M_s(r)$ は半径 r 内に含まれる周囲の物質の質量である。この関係式を用いると、 V の時間進化を軌道のずれる割合に書き直すことができる。

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{fall}}(r)}, \quad \tau_{\text{fall}}(r) = \left(1 + \frac{4\pi r^3 \rho_s(r)}{M_s(r)} \right) \left(\frac{GM_s(r)}{r} \right)^{3/2} \frac{1}{4\pi G^2 M_{\text{PBH}} \rho_s(r) \ln \Lambda}, \quad (3.6,27)$$

ここで $dM_s/dr = 4\pi r^2 \rho(r)$ を使い、さらに次元解析的に τ_{fall} を定義した。もし τ_{fall} が r によらず一定であるとする、式 (3.6,27) 中の 1 式目の解は

$$r \propto \exp(-t/\tau_{\text{fall}}), \quad (3.6,28)$$

となる。これゆえ、半径 r に位置する PBH はおよそ τ_{fall} のタイムスケールで銀河中心に向かって螺旋状に落ち込んでいくことがわかる。銀河中心に近づくと、周囲の物質は主に DM と銀河バルジ内の星で構成されるようになる。個々の成分に対してそれぞれ τ_{fall} を見積もってみよう。バルジ内の星に対しては、密度分布として Hernquist モデルを採用する [80]。

$$\rho_s = \frac{m_B r_B}{2\pi r} \frac{1}{(r + r_B)^3}, \quad (3.6,29)$$

ここで、 $r_B = 0.6\text{kpc}$ であり、 $M_B = 2.6 \times 10^{10} M_\odot$ はトータル質量である。対応する降着時間は

$$\tau_{\text{fall}} \simeq 3 \text{ Gyr} \frac{r/r_B + 3}{r/r_B + 1} \left(\frac{r}{1\text{kpc}} \right)^{5/2} \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10^6 M_\odot} \right)^{-1} \left(\frac{\ln \Lambda}{10} \right)^{-1}, \quad (3.6,30)$$

で与えられる。DM ハローに対しては、密度分布として等温モデルを採用する。

$$\rho_s = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}, \quad (3.6,31)$$

ここで $\sigma = 200\text{km/s}$ である。対応する降着時間は

$$\tau_{\text{fall}} \simeq 3 \text{ Gyr} \left(\frac{r}{1\text{kpc}} \right)^2 \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10^6 M_\odot} \right)^{-1} \left(\frac{\ln \Lambda}{10} \right)^{-1}, \quad (3.6,32)$$

である。これらの見積もりから、銀河中心から $\sim \text{kpc}$ 内にいる $10^6 M_\odot$ 程度重たい PBH は宇宙年齢の間に銀河中心に落ちうることがわかる。

今、銀河年齢のうちに PBH が銀河中心に落ちれるための臨界半径 r_{df} を定義する。動的摩擦効率は PBH の質量に依存するため、この半径も M_{PBH} の関数である。現在時刻までに以下の量で与えられるような質量集中 (mass concentration) が銀河中心にできるであろう。

$$M_{\text{con}} = f_{\text{PBH}} \int_0^{r_{\text{df}}} 4\pi r^2 \rho_{\text{DM}}(r). \quad (3.6,33)$$

先行研究 [48] では、 M_{con} が中心 DM の観測的な限界質量 $\sim 3 \times 10^6 M_\odot$ を超えてはいけないという条件から f_{PBH} へ制限をつけている。それらの解析によると、その結果は $M_{\text{PBH}} > 4 \times 10^4 M_\odot$ の質量の PBH の存在量に対して、強い制限を与える。制限は図 3.1 中の DF の線である。しかしながら、この制限にはいくつかの注意すべき事柄があることを気に留めておかなければならない*³。多数の PBH が中心領域に落ち込むと、PBH が弾き飛ばされる可能性がある。これは、slingshot mechanism と呼ばれ、銀河中心領域で PBH 合体が起きるよりも前に新たな PBH が落ちてくるような状況下で起きやすい*⁴。もし PBH が吹き飛ばされてしまうと、中心領域の質量増加が阻止される。実際、N 体シミュレーションによってこの機構が $\geq 10^{6.5} M_\odot$ のブラックホールに対して効果的であることが示されている [81]。また考慮する必要がある効果として、PBH 連星の合体期の重力波の非等方性による kicking 効果も挙げられる。これにより、中心領域から PBH が抜け出してしまふ可能性がある。

*³ 中心領域の PBH の分布として PBH cluster をつくっているか、合体して重たい PBH がいるような描像が挙げられることを今一度思い出そう。

*⁴ つまり、PBH 合体によって重たい PBH を作るよりも前に多体束縛系ができてしまっているような状況である。

3.6.6.VII Disk heating

銀河ハローをランダムに動く PBH は銀河円盤を通過する可能性がある。その際、円盤中の星は重力により引っ張られ、PBH が近くを通るたびに速度を獲得する。星が獲得する速度の方向はランダムなので、円盤中の星々の速度の時間進化はランダムウォークで記述される。その際、星の速度の分散は時間に比例して増えていく。言い換えれば、円盤中の星は時間が経てば経つほど温度が上がっていく。PBH によって獲得する速度が観測されている速度を超えてはいけないという条件から、PBH の存在量に制限を設けることができる。

動き回っている PBH に遭遇するという状況下で、円盤中の星々に対する PBH の典型的な相対速度の二乗 V^2 が星全体の速度分散よりもはるかに大きい場合、時間 t の間に増加する星の速度分散は

$$\sigma^2 \simeq \frac{8\pi G^2 f_{\text{PBH}} \rho_{\text{DM}} M_{\text{PBH}} \ln \Lambda}{V} t \simeq (50 \text{km/s})^2 f_{\text{PBH}} \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10^6 M_{\odot}} \right) \left(\frac{V}{200 \text{km/s}} \right)^{-1} \left(\frac{t}{10 \text{Gyr}} \right), \quad (3.6,34)$$

与えられる [82, 83]。ちなみに太陽近傍の古い星の速度はおよそ 50km/s である [84]。これゆえ、式 (3.6,34) は、 $10^6 M_{\odot}$ よりも重たい超大質量 PBH が DM の主要要素になれないことを表している。つまり、 $10^6 M_{\odot}$ よりも重たい PBH はに対しては、

$$f_{\text{PBH}} < \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10^6 M_{\odot}} \right)^{-1}, \quad (3.6,35)$$

という意味のある制限を得ることができる。より詳しい議論に関しては論文 [48] を参考にしてほしい。

重たい天体の重力的影響下で星の速度分散がどのように進化していくのかということの定式化は 1984 年に Lacey によって行われた [85]。論文 [83] では、ダークハローが超大質量ブラックホール ($\sim 10^6 M_{\odot}$) で構成されており、それらは円盤加熱を示唆する観測結果を説明しようということが主張されている。しかしながら、近年のより優れた太陽近傍の星々の測定によりこの可能性は否定されている。星々の年齢とそれらの速度分散の関係を表す自由パラメータ ξ を以下のように導入する。

$$\sigma \propto t^{\xi}. \quad (3.6,36)$$

測定より ξ の値はおよそ $\xi \simeq 0.33$ であり、この値の不確定性は $\Delta\xi = 0.02 - 0.05$ であることが先行研究 [84, 86] で示されている。上記の超大質量ブラックホールシナリオの場合は $\xi = 0.5$ であり、これは測定の結果と一致していない。

3.6.7 Accretion constraints

PBH へのガス降着とそれらの影響による、PBH の存在量への制限もまた研究対象になっている [87]。実際、これまでの研究ではいくつかの質量帯の PBH の存在量を制限する上で、PBH へ

のガス降着を用いた手法が非常に強力であることを示している。また、次の 6 節で紹介する我々の研究もこれらの手法のうちの 1 つを用いた研究である。しかしながら、これらの手法は 3.6.2 節や 3.6.6 節で紹介した手法に比べて不確定性が大きい。今のところ、第一原理計算から降着を計算し PBH の存在量を制限した研究はなく、設けられている制限は全て何か仮定がおかれている、もしくは観測的な経験則に基づいている。この章では、初期宇宙において PBH ガス降着から生じる CMB への影響と PBH に降着する物質からの電磁波に分けて PBH への制限をまとめる。

3.6.7.1 Accretion effects on CMB

PBH の周辺のバリオンガスは重力により PBH へ向かって引き寄せられる。ガスが中心に落ちていくにつれて、ガスは圧縮され密度と温度が上昇する。落下中、ガスはガス粒子との衝突、もしくは中心からの放射により完全に電離される。PBH 極近傍では、ガス温度が非常に高く電離ガスから外側に向かって激しい放射が放出される。この放射は周囲のガスを電離・加熱し、その領域を通過した CMB 光子のスペクトルをプランク分布からずらす・CMB 光子の脱結合時をずらす・電離史を変更する等の影響をもたらす。最後の 2 つの効果は CMB の温度と偏光の角度パワースペクトルを変更する。このようにして、PBH は CMB の観測に対して標準的ではない痕跡を残す。そのような痕跡の有無を検出することは PBH の存在量を制限することに繋がる。上記の論理は概念として単純明快であるが、ガス降着の特性の複雑さゆえに第一原理的・自己無矛盾な計算から PBH のガス降着を計算し、どの程度 CMB のスペクトルを歪ませるのか見積もることは非常に困難である。今の所、様々な近似や仮定を適用することでガス降着から PBH の存在量に制限を設けている。

初期の研究 [87] では、PBH への質量降着率に対しては標準ボンディ降着モデルが適用され、降着した質量が放射の光度に変換される効率は宇宙時間に依らないことが仮定され、そして放出される放射のスペクトルは平らで時間に対して一定であることが仮定されていた。論文 [88] では、PBH 周辺のダークハローの進化を考慮してたり、PBH とバリオンガスとの相対速度を考慮することで解析をより細かく行なっていた。論文 [89] では、PBH とバリオンガスの様々な相対速度の場合を取り扱っていた。しかしながら、これらの研究では放射効率が一定値をとることを仮定していた。論文 [50] では、論文 [88] での見積もりを、放射効率が一定値にすることなく再計算しており、見積もられた放射効率が論文 [88] で仮定されていた値よりもはるかに小さいことを示していた。結果として、論文 [88] で導かれていた PBH の存在量への制限は弱まった。以下で、論文 [50] で行われている計算を簡単に説明する。

宇宙論的な背景バリオンガスが絶え間なく PBH に向かって落ち続けるような定常な系を考える。言い換えれば、ガス降着のタイムスケールがハッブルタイムよりも短く降着は断熱的に宇宙膨張に従うことを仮定している。“降着は断熱的に宇宙膨張に従う”とは、密度が高くなりすぎて宇宙膨張から切り離されることはないということである。論文 [88] では、この描像が $M_{\text{PBH}} \geq 3 \times 10^4 M_{\odot}$ に対して有効であることが示されていて、論文 [50] でもその範囲の質量に着目している。PBH から遠い場所では、バリオンガスは PBH からの重力を感じず、密度は宇宙論的な背景密度 ρ_c に等しくなる。PBH のボンディ半径程度になると、CMB 背景光子によるバリオンガスのコンプトン

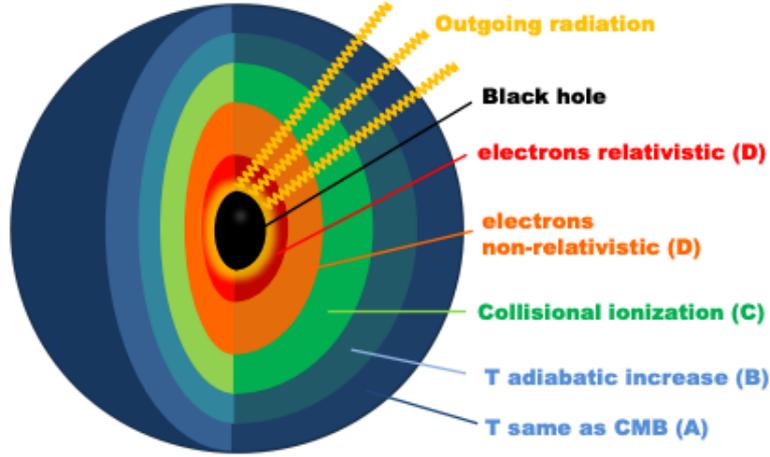


図 3.4 PBH に落ち込むガス状態のイメージ図 ($z \geq 200$). 最も外側の領域 A ではガスと CMB 光子が効率よく結合しており、ガス温度は CMB 温度と等しい。領域 B では、ガスが降着していくに従って断熱的に圧縮され温度が上昇している。領域 C では降着により得られる重力エネルギーが電離に使われ、ガス温度は上昇しない。領域 D と E では、ガスは再び断熱的に圧縮される。PBH の極近傍では、ガス温度が非常に高く制動放射をはじめとする強力な放射が放出されている。論文 [41] から引用。

冷却が聞いてくることでガス温度は CMB の温度と等しくなる。このボンディ半径よりも内側になると、CMB によるコンプトン冷却よりもガス降着の断熱圧縮による加熱が効き、ガス温度は r^{-1} に従って増加する。ガス温度が $\sim 10^4\text{K}$ を越えると、衝突電離が効き始める。この間、降着により得られるガスの内部エネルギーの増加分はガスの電離度と温度を一定に保つことに使われる。ガス温度が電子の質量程度になると、電子が相対論的に動き回るようになり、温度は $r^{-3/2}$ に比例して増加していくようになる。最終的に、ガスは PBH の事象の地平面から PBH に取り込まれていく。事象の地平面付近では、ガス温度は凄まじく制動放射などの放射が放出され、これによりより広範囲の背景ガスが電離・加熱される。ガス粒子の衝突電離ではなく、ブラックホール地平面の極近傍からの放射でガスの電離が起きるのである。(図 3.4 を参考にせよ。)

論文 [50] では、極端な場合として、衝突電離のみによって完全電離する場合 (collisional ionization case) と光電離のみによって完全電離する場合 (photoionization case) の 2 つ状況を考えている。

電離度が宇宙論的な背景ガスの電離度 \bar{x}_e で一定にしている場合の、外側領域ガス降着を記述する基礎方程式は以下の通りである。

$$4\pi r^2 \rho |v| = \dot{M} = \text{const.}, \quad (3.6,37)$$

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{4}{3} \frac{\bar{x}_e \sigma_T \rho_{\text{CMB}}}{m_p} v, \quad (3.6,38)$$

$$v\rho^{2/3}\frac{d}{dr}\left(\frac{T}{\rho^{2/3}}\right)=\frac{8\bar{x}_e\sigma_T\rho_{\text{CMB}}}{3m_e(1+\bar{x}_e)}(T_{\text{CMB}}-T). \quad (3.6,39)$$

ここで $v < 0$ は動径方向のガス速度である。2 番目と 3 番目の式中の最後の項は、それぞれ CMB とのコンプトン冷却による抗力と冷却を表している。これらの式より、質量降着率 \dot{M} を決めることができる。すると、連続の式より事象の地平面近傍の電子数密度を求めることができ、

$$n_e = \frac{\dot{M}}{4\pi m_p r^2 |v|} = \frac{\dot{M}}{4\pi m_p r_g^2} \left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2}, \quad (3.6,40)$$

となる。ここでは自由落下速度 $v \approx \sqrt{r_g/r}$ を用いている。事象の地平面極近傍のガス温度は、上記の基礎方程式を解くことにより求めた温度プロファイル $T(r)$ を断熱的に地平面まで拡張することで決定することができる。電子の数密度と温度の情報より、制動放射の光度を決めることができ、

$$L = \int 4\pi r^2 j dr, \quad j = n_e^2 \alpha \sigma_T T \mathcal{J}(T/m_e) \quad (3.6,41)$$

となる。ここで \mathcal{J} は

$$\mathcal{J}(X) \approx \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sqrt{2/\pi} X^{-1/2} (1 + 5.5X^{1.25}), & X < 1 \\ \frac{27}{2\pi} [\ln(2Xe^{-\gamma x} + 0.08) + \frac{4}{3}], & X > 1 \end{cases} \quad (3.6,42)$$

で与えられる、制動放射の素過程を決める関数である。ここで $\gamma_E \approx 0.577$ はオイラーガンマ定数である。

これより、この放射による単位体積あたりのエネルギー注入率は

$$\dot{\rho}_{\text{inj}} = f_{\text{PBH}} \frac{\rho_{\text{DM}}}{M_{\text{PBH}}} \langle L \rangle, \quad (3.6,43)$$

で与えられる。ここで $\langle L \rangle$ はバリオンガスに対する PBH の相対速度における光度の平均である。注入された放射はコンプトン散乱により背景ガスと相互作用を引き起こす。ガスに蓄えられるエネルギーの時間進化は以下のように与えられる [50]。

$$a^{-7} \frac{d}{dt} (a^7 \dot{\rho}_{\text{dep}}) \approx 0.1 \bar{n}_H \sigma_T (\dot{\rho}_{\text{inj}} - \dot{\rho}_{\text{dep}}). \quad (3.6,44)$$

この式は注入されたエネルギーの大半が、PBH の地表面付近の典型的なガス温度に対応する $0.1 - 1\text{MeV}$ であることを仮定することで導いている。この方法で蓄えられるエネルギーはガス温度、電離度、そして水素原子の第一励起状態への励起に使われることを仮定した。

$$\Delta \dot{T}_{\text{gas}} = \frac{2}{3n_{\text{tot}}} \frac{1+2\bar{x}_e}{3} \dot{\rho}_{\text{dep}}, \quad \Delta \dot{x}_e = \frac{1-\bar{x}_e}{3} \frac{\dot{\rho}_{\text{dep}}}{E_1 n_H}, \quad \Delta \dot{x}_2 = \frac{1-x_e}{3} \frac{\dot{\rho}_{\text{dep}}}{E_2 n_H}, \quad (3.6,45)$$

ここで $E_1 = 13.6\text{eV}$, $E_2 = 10.2\text{eV}$ である。これらの方程式は PBH へのガス降着によりどの程度温度と電離度が増えたとかを表している。例えば、電離度が増加すると CMB の光学的厚みが上昇し、PBH がない場合に比べて大角度スケールでは偏光が増大され、小スケールでは CMB ゆらぎの抑制される。また、最終散乱断面積のずれは CMB スペクトル中の BAO のスケールをずら

す効果を持つ。論文 [50] では、再結合コード (HyRec) [90] とボルツマンコード (CLASS) [91] を用いることでこれらのずれを計算し、Planck collaboration [92] で与えられている CMB の TT, TE, EE のパワースペクトルと比較していた。ここから得られた PBH の存在量制限は図 3.1 に記載されている。

PBH のガス降着により生成される光子は完全には熱平衡化されていないので、初期宇宙における PBH へのガス降着は CMB スペクトルを歪ませる。赤方偏移 $5 \times 10^4 < z < 2 \times 10^6$ の間に生成された光子は運動量平衡状態に達しノンゼロの化学ポテンシャルを生じさせる (μ -distortion)。ここで、上記の赤方偏移の上限と下限は、それぞれダブルコンプトン散乱等の光子数を変化させプランク分布に落ち着かせてしまう過程が頻繁に起きうる臨界時期と運動量平衡状態を保てなくなってしまう臨界時期に対応している。運動量平衡状態を保てなくなってしまうということは、コンプトン散乱や逆コンプトン散乱がハッブルタイムスケール内に多数回起きなくなってしまうことを意味している。赤方偏移 $200 < z < 5 \times 10^4$ の間に生成された光子はコンプトン y -distortion を生じさせる*⁵。ここでの下限赤方偏移はバリオンガスと CMB が脱結合した際の赤方偏移に対応している*⁶。CMB の温度、偏光の非等方性から得られる f_{PBH} の制限と比べると、 μ , y -distortion の強度は、現在もしくは将来の観測で引っかかることは難しいことが論文 [50] で主張されている。

今の所、PBH へのガス降着を議論する際は球対称降着が仮定されている。ガス降着は、ボンディ半径でのガスの角運動量が最も内側でのケプラー軌道にて計算される角運動量よりも小さければおおよそ球状であると言える。もし、この条件が満たされない場合は、ガスは PBH に吸い込まれる前にケプラー回転し始め、PBH の周りに降着円盤を作る。これを式で表すと以下のようになる。

まず、ボンディ半径 r_B でのガスの回転成分の速度を σ_B とする*⁷。角運動量の保存により、半径 $r (r < r_B)$ での速度の回転成分 v_{rot} は

$$v_{\text{rot}} \sim \frac{r_B \sigma_B}{r}, \quad (3.6,46)$$

与えられる。これが、ある程度内側の半径 r_{in} にて、この場所で計算されるケプラー回転速度 $v_{\text{Kep}} = \sqrt{2GM_{\text{PBH}}/r_{\text{in}}}$ よりも小さければ降着円盤をつくらずに PBH に落ち込んでいくと考えるので、この条件式は以下の通りである。

$$\begin{aligned} x_{\text{rot}} &< v_{\text{Kep}}, \\ \Leftrightarrow \frac{r_B \sigma_B}{r_{\text{in}}} &< \sqrt{\frac{2GM_{\text{PBH}}}{r_{\text{in}}}}. \end{aligned} \quad (3.6,47)$$

ちなみに、”半径 r_{in} にて”という条件を除くと、式 (3.6,47) 面上、かならずこの不等式が破綻する

*⁵ コンプトン y distortion は、第 5 章のコンプトン y パラメータと同意である。

*⁶ 誤解を招かないように追記しておく、第 6 章で述べる我々の研究と論文 [50] では考えている状況が異なる。我々の研究では PBH 周囲の高温領域 ($\sim 1\text{eV}$)1 つ 1 つに着目しているのに対し、論文 [50] では PBH 極近傍からの放射による宇宙全体の加熱 ($\leq T_{\text{CMB}}$) に着目している。よって論文 [50] の計算では、 $z = 200$ 以降の電子ガス温度と CMB 温度のずれが重要になっている。言い換えれば、 $z = 200$ 以降では式 (5.1,3) 内の $T_e - T_{\text{CMB}}$ の項が負になってしまう。

*⁷ σ_B はおおよそこの速度がバリオンの速度分散のルートで与えられるであろうという気持ちで書いた。

半径 r_{disk} が存在してしまう。例えば、 $z = 100$, $M_{\text{PBH}} = 100M_{\odot}$ の設定で PBH 静止系でのバリオンの速度分散の計算結果がおおよそ $\langle \sigma_B \rangle_{\text{PBH}}^2 \simeq 209[(\text{km/s})^2]$ であることを考慮し、この半径を求めるとおおよそ $r_{\text{disk}} \simeq 5.7 \times 10^{-7} r_B$ となる。

文献 [65] では、ガスが球状降着するよりも降着円盤が存在する方が、粘性加熱により強い放射が期待されることが示されている。結果として、放射効率は高くなる。論文 [51] では、球状である仮定は再結合期以降破綻することが主張されている。この論文では、解析的な見積りの元、PBH 周辺に降着円盤が形成されることを示唆している。降着円盤が形成される状況下で、論文 [50] と同様の解析を行なった結果が図 3.1 中に示されている。

3.6.7.II X-rays and radio from the present-day PBHs

先ほどまでは、比較的初期宇宙における PBH へのガス降着を考えることで PBH の存在量に制限を設けていた。しかし、PBH の周辺の環境が密であるなら、ガス降着は今も起きているはずであり、ここから放出される放射の理論的予言と実際の観測結果を比べることで PBH の存在量に制限を与えることが可能である。

論文 [93] では、Advection-Dominated Accretion Flow, 通称 ADAF と呼ばれる降着モデルを仮定することで、太陽近傍の $0.5M_{\odot}$ の PBH へのガス降着から放出されるスペクトルを計算していた。この研究は、 $\sim 0.5M_{\odot}$ 程度の PBH が DM の主な構成要素であるとのめかすマイクロレンズ観測を説明することを動機にしていた。そこでは、PBH からの放射スペクトルが赤外線バンドでは検出可能になりうるが X 線バンドでは強度が小さく検出できないことを示していた。これは、赤外線バンドの観測のみから PBH の存在量に制限を設けることができることを暗示している。しかしながら、論文 [93] の主な興味はガス降着による PBH シグナルの検出可能性であったため、 f_{PBH} に対する具体的な制限はこの論文中では与えられていない。他の天体物理学的な光源からの寄与、例えば若い星からの赤外光線などがあるため、PBH へのガス降着を有意に発見するためには多波長での観測による確認が必要であることは指摘しておく。

論文 [52] では、カール・ジャンスキー超大型干渉電波望遠鏡群 (Karl G. Jansky Very Large Array: VLA) の観測データとチャンドラ X 線観測衛星の観測データを用いることで、 $10M_{\odot} < M_{\text{PBH}} < 100M_{\odot}$ の質量帯における PBH の存在量への上限を得ている。制限までの流れは以下の通りである。まず、PBH に対して周囲のガスが以下の割合で降着することを仮定する。

$$\dot{M} = 4\pi\lambda(GM_{\text{PBH}})^2 \frac{\rho_{\text{gas}}}{(v_{\text{PBH}}^2 + c_s^2)^{3/2}}, \quad (3.6,48)$$

ここで、 λ はボンディ降着率で規格化するための規格化因子であり、矮新星の X 線観測と同等の $\lambda = 0.02$ を採用していた。(論文 [94] も参考にしてほしい。) 質量降着率を降着ガスからのポロメトリック光度に変形するための放射効率を以下のように定義する。

$$L_B = \eta\dot{M}, \quad \eta = 0.1 \left(\frac{\dot{M}}{0.01\dot{M}_{\text{Edd}}} \right), \quad (3.6,49)$$

ここで \dot{M}_{Edd} はエディントン限界に対応する質量降着率である。つまり、放射効率がこの研究の興

味対象である $\dot{M} < 0.01\dot{M}_{\text{Edd}}$ を満たす時、質量降着率に比例することは観測データでも支持されている [95]. ボロメトリック光度から X 線光度を得るためには、

$$L_X = 0.3L_B, \quad (3.6,50)$$

を適用していた. 周囲のガスが降着しているブラックホールは GHz 電波を放出するジェットと呼ばれる現象を伴うことが知られている. ジェットを伴うブラックホール質量と X 線光度 L_X , そして電波光度 L_R の間の経験的關係である, fundamental plane [96] を用いることで, PBH はジェットを伴うという仮定のもと電波光度を計算することができる. とある与えられた PBH の質量から L_X と L_R を計算するためにこの関係を使い, Navarro-Frenk-White(NFW) プロファイル [97] とマクスウェルボルツマン分布にしたがって分布する PBH の位置と速度により Monte Carlo シミュレーションを行うことで, Chandra [98] と VLA 観測 [99] に対して X 線と電波源として検出可能な PBH の期待値を見積もることができる. これら 2 つの観測から f_{PBH} に対して制限を設けることができ, その結果が図 3.1 の通りである.

現在のガス降着による PBH の制限は, Chandra, Spitzer, GALEX そして 2MASS にて解析された 29 個の近傍星形成銀河における X 線連星の光度関数 [100] を用いることでも得ることができる [53]. 論文 [100] では, 式 (3.6,48) 中で $\lambda = 1$ を代入, X 線光度に対して $L_X = L_B$ とし, さらに先行研究 [101, 102] のシミュレーションにて支持されている銀河内の DM 円盤を PBH の分布に適用することで, PBH による X 線の光度関数を求め論文 [100] で与えられている観測結果と比べた. これにより $\sim 10^7 M_\odot$ 程度の PBH の存在に対して強い制限をつけた. この制限は図 3.1 の通りである.

ここでもやはり, ガス降着とそこから放出される放射には多くの不確定性が含まれていることを一言添えておく. しかし, これらの研究は現在の PBH へのガス降着が, PBH の存在量に制限を与えるための可能性を存分に秘めていることを示しているのである. また, 天体物理学的な星由来の孤立ブラックホールに対する電磁波を用いた研究も非常に盛んに行われていうこともここで追記しておこう [93, 94, 103, 104].

3.6.8 Indirect constraints

ここまでは, PBH により生じる宇宙論・天体物理学的な効果を考慮することによって, PBH の存在量に制限を設けてきた. つまり, これらの制限は PBH が存在することによって直接引き起こされる効果から課されたものであった. これらの手法の良い点は, PBH の形成過程にたよらずに制限を設けることができる, ということである. 言い換えれば, PBH 形成を予言するモデルはこれらの直接的な制限を満たさなければならない.

直接的な制限に加えて, 間接的に PBH の存在量に制限を設ける手法も存在する. ここでは, これらの間接的手法について解説する. 3.2 節で述べたように, 最も一般的な PBH 形成過程は原始密度ゆらぎが直接重力崩壊しブラックホールを形成するというものである. 原始密度ゆらぎとは, インフレーション機構の枠組において自然に生成されるゆらぎである. このシナリオでは, PBH

は非常にレアな高密度領域 (典型的には $\sim 10\sigma$) のみから形成される。これ以外の領域では PBH を形成するに至らないが、観測により除外されるような影響を残しうる。これらの効果は PBH によって直接引き起こされるものではないが、PBH の種となる原始密度ゆらぎによって引き起こされるものであり、結果として間接的な PBH の存在量制限を得ることができる。ただし、得られた間接的な制限を元に、PBH を予言する特定のインフレーションモデルを制限しようとするときには、間接的制限を得る際に課した仮定に注意する必要がある。

3.6.8.1 2nd order gravitational waves from the primordial density perturbation

最初の効果は、原始密度ゆらぎの mode-mode カップリングにより生じる Stochastic な重力波である。スカラータイプの密度ゆらぎは、テンソルタイプの重力波に対してゆらぎの線形オーダーでは独立に成長する。これは SVT 分解などと呼ばれ、詳しくは文献 [105] などを参照されたい。しかし、線形オーダーを超えると、この独立性は破綻し mode-mode カップリングにより 2 次のオーダーで密度ゆらぎから GW が放出される。逆に、Stochastic GW から mode-mode カップリングにより密度ゆらぎが作られることもありえる。このような密度ゆらぎにより PBH を作りすぎてはいけない、という条件のもと Stochastic GW の強度に上限をつけた研究も存在する [106, 107]。

原始密度ゆらぎが超ハッブルスケールに存在している場合を仮定すると、密度ゆらぎがホライズンに再び入ってくる際に 2 次のオーダーの効果による GW 生成が起きる [108, 109]。言い換えれば、PBH 形成と同時期に GW が主に生成されるのである。GW は一度生成されるとその後の時代を伝播し、現在の宇宙でもなお浸透しているはずである。そのような GW の典型的な周波数は GW 放出時のホライズンスケールに対応していること、さらに PBH のサイズは形成時のホライズンサイズに対応していることを考慮すると、PBH 質量と 2 次重力波の現在時刻における周波数の関係が導ける [110]。

$$f_{\text{GW}} \simeq 1 \times 10^{-9} \text{Hz} \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{30M_{\odot}} \right)^{-1/2}. \quad (3.6,51)$$

これゆえ、星質量程度の PBH を形成する原始密度ゆらぎは nHz バンドの非常に低い周波数帯の GW を放出することがわかる。極めて面白いことに、これらの周波数帯の GW は pulsar timing の観測によって制限することができる。

パルサーとは電波ビームを放出しながら高速で回転する中性子星であり、低周波数の GW を検出するためによく用いられる。(詳しくは [111] を参照せよ。) 特に、 $\mathcal{O}(\text{ms})$ の周期で回転する、ミリ秒パルサーは一般的に長期間にわたるタイミング観測で精度が高いことが知られている。ミリ秒パルサーにおける個々のパルサーの到着時間は正確に測定され、パルサータイミングモデルの予言と比較されてきた。すなわち、宇宙膨張によって計量の空間-空間成分の時間変化は赤方偏移を生じさせるため、パルサー周波数 $\nu = 1/T$ は GW が存在しているとする修正される。ここで T はパルサーの到達時間の間隔を表している。修正されたパルサー周波数は以下のように与えられる [112]。

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -H^{ij} [h_{ij}(t, \vec{x}_e) - h_{ij}(t - D, \vec{x}_p)], \quad (3.6,52)$$

ここで H^{ij} はパルサーの方向に対する GW の伝播方向に依存した幾何学的因子、 D はパルサーとの距離、そして \vec{x}_e と \vec{x}_p は地球とパルサーの位置ベクトルである。これは時間 t におけるパルサー到達時間のずれを以下のように生じさせる。

$$R(t) = - \int_0^t \frac{\delta\nu}{\nu} dt. \quad (3.6,53)$$

Hellings と Downs [113] は、天頂角が θ のパルサー間で stochastic GW による到達時間のずれの相関関数 (GW の強度によって規格化) を求めた結果以下のように与えられることを示した。

$$c(\theta) = x \ln x - \frac{x}{6} + \frac{1}{3}, \quad x = \frac{1 - \cos \theta}{2}. \quad (3.6,54)$$

Pulsar Timing Array (PTA) として知られる、多数のパルサーペアに対して測定されたデータからこのタイプの相関を調査することで、もし観測機器の感度よりも強い強度でそれらが届けば GW を検出することができる。もし検出されなければ、GW の強度に関して上限を設けることができる。

現在、主に 3 つの PTA 観測プロジェクトによりミリ秒パルサー群の恒常的なタイミング観測が行われている。1 つ目は Parkes Pulsar Timing Array, 通称 PPTA [114], 2 つ目は North American Nanohertz Observatory for Gravitational Wave, 通称 NANOGrav [115], そして 3 つ目が European Pulsar Timing Array, 通称 EPTA [116] である。上記以外でも、将来建設される電波望遠鏡である中国の 500 メートル球面電波望遠鏡 (FAST) や南アフリカの MeerKAT, 中国の Qitai Radio Telescope, そして南アフリカとオーストラリアの Square Kilometre Array (SKA) が PTA 観測に利用される予定である。今のところ Stochastic GW の検出は報告されておらず、GW の強度上限が設けられている。

原始密度ゆらぎによる 2 次重力波生成に話を変えよう。はじめに、平坦 FLRW 時空におけるスカラータイプのゆらぎと作られるテンソルタイプのゆらぎを記述するために計量を与える [108, 109]。

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + (1 - 2\Psi) \left(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij} \right) dx^i dx^j \right], \quad (3.6,55)$$

ここで Φ と Ψ はスカラータイプのゆらぎであり、それぞれ重力ポテンシャルと曲率ゆらぎを表している。 h_{ij} はトランスバーストレースレス (TT) 条件 $\partial_i h^i_j = h^i_i = 0$ を満たすテンソルゆらぎである。妥当な近似として非等方ストレステンソルがゼロであると思う [109] と、 $\Phi = \Psi$ となる。ここでは、インフレーション中もしくはインフレーション後になんらかの他の機構で生成された h_{ij} は考慮しない。放射優勢期における線形オーダーでの Φ の進化はバーディーン方程式で与えられる。

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' - \frac{1}{3}\Delta\Phi = 0. \quad (3.6,56)$$

フーリエ空間におけるこの方程式の解は、減衰解を無視するとすると

$$\Phi_k(\eta) = D_k(\eta)\Phi_k(0), \quad D_k(\eta) = \frac{3}{(k\eta)^2} \left[\frac{\sqrt{3}}{k\eta} \sin\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) \right], \quad (3.6,57)$$

と求まる．ここで初期条件 $\Phi_k(0)$ はインフレーションモデルか Φ のパワースペクトルを仮定することによって決まる． h_{ij} の進化はアインシュタイン方程式を展開することによって求まる．スカラータイプのゆらぎの 2 次オーダーにおいて，この展開式は

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \Delta h_{ij} = -4\hat{\mathcal{T}}_{ij}^{rs} S_{rs}, \quad (3.6,58)$$

のように書き下すことができる [108, 109]．ここで $\mathcal{H} = a'/a$ ， $'$ は共動時間微分， $\hat{\mathcal{T}}_{ij}^{rs}$ は TT 演算子，そしてスカラータイプのゆらぎを生成するソース項は

$$S_{ij} = 2\Phi\Phi_{,ij} - (\Phi_{,i} + \mathcal{H}^{-1}\Phi'_{,i})(\Phi_{,j} + \mathcal{H}^{-1}\Phi'_{,j}), \quad (3.6,59)$$

と与えられる．GW は以下のようにフーリエ変換することができる．

$$h_{ij}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \sum_{I=+, \times} e_{ij}^I(\vec{k}) h_I(\eta, \vec{k}), \quad (3.6,60)$$

ここで $e_{ij}^{+, \times}$ は $e_{ij}^+ e^{+ij} = e_{ij}^\times e^{\times ij} = 1$ で規格化された偏光テンソルである．式 (3.6,57) より S_{ij} の時間進化を知ること， h_{ij} の時間進化を

$$h_I(\eta, \vec{k}) = \frac{1}{a(\eta)} \int_0^\eta G_k(\eta, \eta') a(\eta') S_I(\eta', \vec{k}) d\eta', \quad (3.6,61)$$

のように決めることができる．ここで $G_k(\eta, \eta') = \sin(k(\eta - \eta'))/k$ は式 (3.6,60) のグリーン関数であり， $S_I(\eta, \vec{k})$ は式 (3.6,60) の右辺のフーリエ変換である [117]．

$$S_I(\eta, \vec{k}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}} 4e_{ij}^I(\vec{k}) q_i q_j f(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}, \eta) \Phi_{\vec{q}}(0) \Phi_{\vec{k} - \vec{q}}(0), \quad (3.6,62)$$

ここで，

$$f(\vec{k}, \vec{q}, \eta) = 2D_k(\eta)D_q(\eta) + \left(D_k(\eta) + \frac{D'_k(\eta)}{\mathcal{H}}\right) \left(D_q(\eta) + \frac{D'_q(\eta)}{\mathcal{H}}\right), \quad (3.6,63)$$

である．

Φ の大きさは確率的なので，生じる重力波の強度もまた確率的である．GW の大きさを表す便利なパラメータが Ω_{GW} であり，臨界密度によって規格化された対数表記の周波数に対する GW のエネルギー密度を表している．GW のエネルギー密度に対する公式 [118]，

$$\rho_{\text{GW}} = \frac{1}{128\pi G} \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \rangle, \quad (3.6,64)$$

と GW パワースペクトルの定義

$$\langle h_I(\vec{k}) h_J(\vec{q}) \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_h(k) \delta(\vec{k} + \vec{q}) \delta_{IJ}, \quad (3.6,65)$$

を用いると

$$\frac{\rho_{\text{GW}}}{\rho_{c,0}} = \int d\ln f \Omega_{\text{GW}}(f), \quad \Omega_{\text{GW}}(f) = \frac{1}{24H_0^2} k^2 \mathcal{P}_h(k), \quad (3.6,66)$$

という2つの式を得ることができる。ここで $k = 2\pi f$ である。スカラータイプのゆらぎのガウス性を仮定すると、 Ω_{GW} を以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{GW}}(f) = & \frac{k^5}{3\pi H_0^2} \int_0^{\eta_0} d\eta' \int_0^{\eta_0} d\eta'' G_k(\eta_0, \eta') G_k(\eta_0, \eta'') \frac{a(\eta') a(\eta'')}{a^2(\eta)} \\ & \times \int d^3q \frac{\left(e^{ij}(\vec{k}) q_i q_j \right)^2}{q^3 |\vec{k} - \vec{q}|^3} f(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}, \eta') f(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}, \eta'') \mathcal{P}_{\Phi}(q) \mathcal{P}_{\Phi}(|\vec{k} - \vec{q}|). \end{aligned} \quad (3.6,67)$$

P_{ϕ} を除く全ての関数は、我々が知っている関数である。それゆえこの式 (3.6,67) を用いることで、 P_{Φ} に対する Ω_{GW} を計算することができる。

論文 [110] では、 P_{Φ} の形としてデルタ関数型を仮定し、さらに現在の宇宙において考えうる PBH の存在量を予言するような強度を仮定することで得られる Ω_{GW} は、pulsar timing の観測による Ω_{GW} の上限を超えることが示唆されている。論文 [119] では、 P_{Φ} の解析がより一般化され P_{Pbi} の形がシルクハット型の場合の計算が行われたている。この解析から、 P_{Pbi} の形が広がれば広がるほど予言される Ω_{GW} の値が小さくなることが示されている。

3.6.8.II CMB spectral distortions from the primordial density perturbation

2番目の間接的制限は、原始密度ゆらぎによる CMB スペクトル歪みから得られる [120, 121]。基本的な考え方は以下の通りである。

CMB の脱結合時前にホライズンインした光子とバリオンガスのゆらぎは光子とバリオン間の強い結合により音響振動する。これらの振動は光子の拡散により次第にかき消されてゆく。これはシルク減衰として知られている現象である。光子の平均自由行程 $\ell_{\text{mp}} = 1/(\sigma_T n_e)$ と拡散がランダムウォークで記述できることを用いると、ゆらぎの共動波数はゆらぎの減衰時間と以下のような関係をもつ。ここで n_e は自由電子の数密度である [122]。

$$k = \frac{1}{1+z} \sqrt{n_e \sigma_T H(z)} \simeq 4 \times 10^{-6} (1+z)^{3/2} \text{Mpc}^{-1}. \quad (3.6,68)$$

これはより小さいスケールのゆらぎほどシルク減衰が早く起きることを表している。減衰を通じて、ゆらぎの振動エネルギーは背景の一樣プラズマガスに輸送される。もしシルク減衰が $z \approx 2 \times 10^6$ 以前に起きたとすると光子数が自由に変わるため注入したエネルギーは完全に熱平衡化に使われる。結果として、生じる影響はわずかに単位共動体積あたりのエントロピーを増加させるだけである。ゆらぎが $5 \times 10^4 \leq z \leq 2 \times 10^6$ の間にシルク減衰した場合は、運動量平衡状態に達する。結果として、光子は化学ポテンシャルを獲得し、光子の分布は $\mu \neq 0$ のボースアインシュタイン分布になる (μ -distortion)。式 (3.6,68) より、 μ -distortion の生じる波数は $50 \text{Mpc}^{-1} < k < 10^4 \text{Mpc}^{-1}$ の間の波数であることがわかる。もし、 $z \approx 5 \times 10^4$ 以降にゆらぎが拡散された場合は運動量平衡状態に達せず、単発の逆コンプトン散乱により y -distortion を生じさせる。これゆえ、 50Mpc^{-1} よりも小さい共動波数のゆらぎは y -distortion を生じさせることがわかる。

簡単のため、原始密度ゆらぎのパワースペクトルとして強度 \mathcal{A} で $k = k_*$ のデルタ関数型を仮定する。PBH を生成するためには、 $\mathcal{A} = \mathcal{O}(0.01 - 0.1)$ が必要である。その時生成される μ -distortion の大きさは、先行研究 [123, 124] より以下のようにして与えられることがわかっている。

$$\mu \simeq 2 \times \mathcal{A} \left[\exp \left(-\frac{k_*}{5400 \text{Mpc}^{-1}} \right) - \exp \left(-\left[\frac{k_*}{31.6 \text{Mpc}^{-1}} \right]^2 \right) \right]. \quad (3.6,69)$$

今の所、CMB の μ -distortion は検出されておらず、COBE/FIRAS 観測によって $\mu < 9 \times 10^{-5}$ という厳しい制限が設けられている [125]。低めの強度として $A = 0.02$ であると仮定しても、生成される μ -distortion は COBE/FIRAS で得られているこの制限 ($2 \text{Mpc}^{-1} < k < 3 \times 10^4 \text{Mpc}^{-1}$) と矛盾してしまう。これにより、もし PBH がガウス型の密度ゆらぎが直接重力崩壊して作られたのだとすると、

$$2 \times 10^4 M_\odot \lesssim M_{\text{PBH}} \lesssim 2 \times 10^{13} M_\odot \quad (3.6,70)$$

の質量帯の PBH の存在はほぼ棄却される*8 [124, 126]。

3.6.8.III Big-bang nucleosynthesis

さきほどの 3.6.8.II 節より、 $k \geq 10^4 \text{Mpc}^{-1}$ の原始密度ゆらぎのスケールを PBH の質量に焼き直すことで、 $M_{\text{PBH}} < 2 \times 10^4 M_\odot$ の PBH に対して存在量を制限することは難しいことがわかった。これは、そのような小スケールのゆらぎのシルク減衰は CMB のスペクトルに何も影響を及ぼさないためであった。しかしながら、BBN からこのような小さな質量の PBH に対して制限をかけることが可能である。

$10^4 \text{Mpc}^{-1} \leq k \leq 10^5 \text{Mpc}^{-1}$ の波数域にある原始密度ゆらぎは赤方偏移 $2 \times 10^6 < z < 10^7$ の間にシルク減衰によって拡散される。この期間は BBN 期よりも後であるが光子の脱結合時よりもはるかに前である。 $(k \geq 10^5 \text{Mpc}^{-1})$ のゆらぎはニュートリノ拡散によりニュートリノ脱結合前に拡散してしまっている。これらの拡散してしまったゆらぎの振動エネルギーも混合プラズマガスに受け渡されるが、これは BBN よりも前の時代であるため今回の議論には影響を及ぼさない。詳しくは論文 [127] の Fig.1 を参照せよ。) これらのゆらぎのシルク減衰で注入されたエネルギーはプラズマガスの温度を上昇させる。バリオン数の保存により、この過程によって光子の数密度だけが上昇する。言い換えれば、バリオン光子比 $\eta \equiv n_b/b_\gamma$ がシルク減衰によって減少する。これは、BBN 期における η が CMB 脱結合期における η よりも大きいことを意味する ($\eta_{\text{BBN}} > \eta_{\text{CMB}}$)。BBN によって生成される軽元素の数は η_{BBN} によってコントロールされ、現在の宇宙における軽元素の測定は η_{BBN} を決めることができる*9。CMB 温度のパワースペクトルにおける音響ピー

*8 ここで”ほぼ”という言葉を使っているのは、すべて確率的な話であるからである。

*9 これはバリオン数が保存されることから来ている。もちろん超新星爆発などの天体物理学的な影響により軽元素の量は BBN の時から変化する不確定性は存在するが、このような不確定性は現在の研究でかなり取り除かれているらしい。詳しくは、論文 [128] などを参照せよ。

クは η_{CMB} によってコントロールされており、CMB の非等方性の測定は η_{CMB} を決めることができる。 η_{BBN} と η_{CMB} の違いはシルク減衰によってどの程度エネルギーが注入されたか、いわば原始密度ゆらぎの大きさによる。それゆえ、独立な観測から η_{BBN} と η_{CMB} を決定することは、対応するスケールの原始密度ゆらぎの強度に制限を与えることになる [129]。今現在の観測から、 $\eta_{\text{BBN}} = (6.19 \pm 0.21) \times 10^{-10}$ と $\eta_{\text{CMB}} = (6.11 \pm 0.08) \times 10^{-10}$ という結果が得られている [130]。これらの値を使うと、デルタ関数型の初期パワースペクトルの強度 \mathcal{A} に対して、

$$\mathcal{A} \leq 0.06, \quad (3.6,71)$$

という上限を得る [129]。

より厳しい制限は、断熱原始密度ゆらぎの存在下で、BBN 中にフリーズアウトした中性子数を調査することで得ることができる。BBN の後に拡散するこれらの密度ゆらぎは $\rho_\gamma \propto T^4$ の関係から BBN 中に局所的な温度ゆらぎを生成する。平均よりも温度が高い局所的な領域では、相互作用が長引きフリーズアウトが遅れ、結果として中性子の量が少なくなる。逆に、中性子が多い場所は平均より温度が低い領域であるといえる。温度が高い領域ではバリオンが多く ($\delta n_b \propto \delta T$)、さらに共動体積を固定すると温度の低い領域に比べて計量ゆらぎによって物理的な体積が大きくなるため、平均的な中性子割合は温度の高い領域に引きずられる。これより得られた \mathcal{A} の上限は [117]

$$\mathcal{A} \leq 0.02, \quad (3.6,72)$$

である。この条件は PBH 生成の可能性を完全に排除するような条件ではないが、PBH 生成に必要な典型的な強度ぎりぎりの制限である。これは、将来の観測における誤差の削減が PBH のシグナルを見つけたり、もしくは次第に対応する質量帯の PBH 生成可能性を排除することにつながることを示唆している。

3.6.9 Future constraints

ここまで紹介した全ての PBH 存在量制限は現存の観測データにより得られた制限であった。これゆえ、データと制限を導くまでの理論が正しい限り、得られた制限はかならず満たしていなければならぬものであった。

これらの制限は、現存もしくは過去に存在していた観測装置より観測精度が良い装置により将来改善されるであろう。更には、全く新しいタイプの観測装置によって PBH の存在を確認、もしくは否定することができるかもしれない。将来 PBH の存在量制限に対して関連しうる物理・観測手法としては、いまのところ高速電波バースト (Fast Radio Bursts: FRBs) や 3.6.8.I 節で少し紹介したパルサータイミングアレイ (PTA)、そして 21cm 線が挙げられる。

詳しい説明はここでは省くが、FRBs に関しては論文 [131, 132]、FRBs と PBH の関係に関しては論文 [133]、PTA と PBH の関係に関しては論文 [134] などを参考にしてほしい。最後に、21cm 線と PBH の関係を軽くまとめてこの章を終わろうと思う。

21cm 線とは水素の基底状態におけるスピンの違い (超微細構造) のエネルギー差に対応する周波数である。中性水素を構成する陽子と電子はそれぞれ $1/2$ のスピンをもっており、スピン状態が

平行のとき (triplet) の方が, 反平行のとき (singlet) よりもエネルギー準位が高い. 水素原子はこのエネルギー準位差に対応した電磁波を放射あるいは吸収する. このエネルギー準位差が波長に換算すると 21 cm なのである. ちなみに, 21cm 線を周波数換算すると 1.4GHz, 温度換算すると 0.068mK である. 中性水素原子のうち, singlet 状態の数密度を n_0 , triplet 状態の数密度を n_1 とする. スピン温度 T_s の時のこれらの相対数密度は

$$\frac{n_1}{n_0} = 3 \exp\left(-\frac{T_*}{T_S}\right), \quad (3.6,73)$$

で与えられる. スピン温度は

$$T_S = \frac{T_{\text{CMB}} + y_\alpha T_\alpha + y_c T_K}{1 + y_\alpha + y_c}, \quad (3.6,74)$$

のように表され, CMB 温度と Lyman- α pumping と呼ばれる Lyman- α を介した天体から影響, そして水素原子との衝突の 3 つの寄与によって決まる [135]. 21cm 線の強度は普通, 輝度温度 T_b によって記述される. もっと正確に言うと, 我々が実際に観測するのはスピン温度と CMB 温度の差 (differential brightness temperature) である.

$$\delta T_b = (1 + z)^{-1} (T_S - T_{\text{CMB}}) (1 - e^{-\tau}), \quad (3.6,75)$$

ここで τ は 21cm 光子に対する光学的厚みである [135].

論文 [136] では, PBH へのガス降着から放射される X 線による 21cm 輝度温度ゆらぎへの影響を調べている. 暗黒時代においてこのような放射が放出されるとすると, 周囲の中性水素ガスは電離・加熱される. 電離により中性水素の量が減り, PBH へのガス降着から放出される Lyman- α 光子が T_α の項を通じてスピン温度に影響を及ぼし, さらに放出された放射により中性水素が加熱され運動的温度 T_K が変わることもスピン温度が変更される. この論文 [136] では, X 線のスペクトルとして冪乗型のスペクトルを仮定し, 強度をエディントン光度の 10% と仮定することで輝度温度ゆらぎを計算していた. この計算結果によると, SKA 程の観測精度があれば $10^2 M_\odot < M_{\text{PBH}} < 10^8 M_\odot$ の質量帯に対して, $z = 30$ で $\Omega_{\text{PBH}} = 10^{-5} (M_{\text{PBH}}/10^3 M_\odot)^{-0.2}$, $z = 20$ で $\Omega_{\text{PBH}} = 10^{-7} (M_{\text{PBH}}/10^3 M_\odot)^{-0.2}$ までの PBH シグナルを検出できることが示されている.

第 4 章

The Cosmic Microwave Background

この章では、CMB の発見から現在の CMB 観測に至るまでの歴史を説明する。さらに最後の 4.6 節では、私の研究 [9] に関連する CMB 温度揺らぎ生成機構である 2 つの SZ 効果の発見について紹介する。

4.1 The history of Cosmic Microwave Background

時は今から 50 年以上前の 1964 年に遡る。当時、Bell 研究所に所属していた物理学者である、Penzias と Wilson の二人は、電波天文学の観測で使う高感度ホーンアンテナのノイズレベルの測定を行っていた。ところが、このアンテナは使用するたびに、かすかな途切れることのないノイズを記録していた。当然彼らは自分たちの装置に問題があると考え、あらゆる努力を払ってこれらのノイズの原因の解明に取り組んだ。しかしどうしてもこのノイズが取り除けず、正体不明の波長 $\lambda = 7.35\text{cm}(4\text{GHz})$, $\Delta T = 3.5 \pm 1.0\text{K}$ [137] のノイズを残したまま万策尽きた。そして彼らはある可能性に突き当たる。これはノイズではなく、実際に空全体からやってくる放射ではないか。

しかし、当時の彼らが不幸にも知らないことがあった。それは、ビッグバン宇宙論 [138] の存在、さらに言うところのビッグバン宇宙論の予言である、とある放射の存在である。ビッグバン宇宙論では初期の熱い状態から宇宙が膨張するにつれて宇宙を満たす放射の温度が下がっていき、現在の宇宙にもわずかにその残光が残っているはずだと予想されていた。実際、Ralph A. Alpher と Robert Herman は、その残光が絶対温度にして約 5K 前後の黒体放射スペクトルを持ち、宇宙空間全体を満たしていると予言していた。この温度領域の放射はマイクロ波領域の電磁波となるため、宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background: CMB)) と名付けられていた。当時は、宇宙の始まりのモデルとして定常宇宙論が人気で、ビッグバン宇宙論はあまり注目されていなかったために、Penzias と Wilson の二人は CMB の存在を知らなかったのである。

ちょうど同時期に Princeton 大学の Robert H. Dicke やその助手の James Peebles を中心とするグループはビッグバンモデルの検証、そして CMB の検出のための研究を勢力的に行っていた。さらには、その予言に基づき、Peter Roll と Dave Wilkinson の協力のもと、自分たちで CMB を検出するために、マイクロ波用のラジオメーターを組み立て観測を行っていたが、CMB

のシグナルをすでに拾っていることに気づかないまま、その観測は失敗に終わった。彼らの研究を知らされた Penzias と Wilson の二人は、早速彼らに電話をかけた。その電話で Diche や Peebles は即座にそれが CMB であることを確信し、Penzias と Wilson もそこで初めて大変歴史的な発見をしていたことを知るのである。これはなかばビッグバン宇宙論を証明したと言っても過言ではない。こうして Penzias と Wilson の CMB の発見により、当時人気であった定常宇宙論の考え方は衰退し、ビッグバン宇宙論が主流になった。

4.2 Measurements of the CMB

CMB の詳細な観測はその後もすすめられ、1990 年には立て続けに 2 つの観測プロジェクト

- Goddard Space Flight Center の Hohn C. Mather や Berkeley 大学の George F. Smooth 率いる観測チームにより打ち上げられた NASA の COBE(COSmic Background Explorer) 衛星
- Mark Halpern と Ed Wishnow とともに British Columbia 大学の Herb Gush がニューメキシコ州のホワイトサンズ・ミサイル実験場から打ち上げたロケット搭載観測機

が遂行され、それまでに比べて抜群に精度の良いデータが得られる様になった。特に、COBE 衛星がのちの宇宙論業界にもたらした影響は非常に大きい。というのも、Mather と Smooth らは数年かけた CMB の詳しい観測によりスペクトルの精密測定と CMB の温度非等方性の発見という 2 つの大きな成果を得たのである。

4.3 COBE result: almost perfect black-body

COBE 衛星による観測結果の第一報は、打ち上げの翌年の 1990 年 5 月 10 日の *Astrophysical Journal Letters* に掲載された Mather らによる Letter 論文であった。そこには、"CMB の背景放射は観測波長域にわたり 1% の精度で完全な黒体放射、温度は $T_0 = 2.735 \pm 0.06\text{K}$ " との記述があった。その後の観測データにより、黒体放射の温度 T_0 としては、

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001\text{K}, \quad (4.3,1)$$

という精密な値が得られている。

4.4 COBE results: discovery of anisotropy

宇宙マイクロ波背景放射はどの方向からもほとんど同じ温度でやってくることはさきほどまで見てきた。ただし、温度が完全に等方的であるなら、初期の宇宙が完全に一様であることを意味するため、現在の宇宙の大規模構造の存在を理解するのが難しくなってしまう。そのため、宇宙構造の起源や進化を考えると、CMB の温度にわずかながら非等方性が見つかるはずだと考えられていた。

COBE 衛星のこの CMB 非等方性に関する結果の第一報は、スペクトルの精密測定の結果が公表されてからおよそ 1 年遅れの 1991 年 4 月 10 日であったが、この時はまだ CMB に対する有意な非等方性は検出されなかった。しかし、この観測の恩恵として我々の住む地球が、CMB の静止系に対して固有速度をもって運動していることによるドップラー効果からくる双極的な異方性が検出された [139]。もちろんこの時すでに、地球が太陽に対して、太陽系は銀河系中心に対して、そして銀河系は付近の銀河群の中心に対して…とそれぞれ運動していることは知られていたが、CMB に対する固有運動の測定できたということは、これはこれでインパクトがあることであった。ちなみに、双極成分は $D = 3.358 \pm 0.001 \pm 0.0023 \text{mK}$ 、銀径 ℓ 、銀緯 b における固有速度の方向は、 $(\ell, b) = (264^\circ. 31 \pm 0^\circ. 04 \pm 0^\circ. 16, 48^\circ. 05 \pm 0^\circ. 02 \pm 0^\circ. 09)$ 、そして固有速度の大きさは $v = 369. 0 \pm 2.5 \text{km/s}$ である [140]。さらに CMB 温度非等方性が有意に見つからなかったとする第 1 報からさらに 1 年がたった 1992 年 9 月 1 日、ついに大ニュースが発表される。CMB 温度の非等方性がついに発見されたのである。その温度非等方性の大きさは実に $\Delta T = 30 \pm 5 \mu\text{K}$ であった。このような微小なゆらぎを COBE 衛星は見事検出したのだ。しかもこの温度非等方性の性質は、ビッグバンモデルに基づく標準的な構造形成理論から予想されるものとまさに一致していたのだから驚きである。我々は、この CMB のゆらぎの情報を通して宇宙の晴れ上がり時の宇宙の様子を知ることができる。もしも、CMB ゆらぎをより正確に知ることができれば、それは宇宙誕生からおおよそ 38 万年後の宇宙の姿をより精密に、より正確に知ることを意味する。それゆえ、COBE 衛星の打ち上げ後、宇宙論は”CMB ゆらぎ自体の観測を試みる時代”から”CMB ゆらぎをより正確に見積もる時代”にかわっていった。

4.5 Subsequent observations of CMB

COBE の後継機として、次に打ち上げられたのがウィルキンソン・マイクロ波異方性探査機 (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe: WMAP) である。WMAP は、2001 年に NASA によってアメリカのケープカナベラル空軍基地から打ち上げられた。WMAP の打ち上げ目的は CMB 温度を全天にわたって測定することであり、この観測によって COBE 衛星のデータよりも精確な CMB および CMB ゆらぎのデータを得ることができた。これらの精確なデータを用いることで、我々は宇宙年齢をはじめとする様々な宇宙の情報 (宇宙論パラメータ) を従来よりも正確に見積もることに成功した。さらにその後の 2009 年、今度はヨーロッパ宇宙機関によってプランク衛星が打ち上げられた。プランク衛星は、従来よりもさらに高精度でより正確な CMB 全天サーベイを行った。打ち上げから 4 年後の 2013 年、プランク衛星による初めてのデータが公開された。このデータは CMB 温度のデータのみであったが、当時考えられていた標準宇宙論の正しさを裏付けるには十分な代物ものであった。プランク衛星による初のデータ公開から 5 年がたった 2018 年、Planck collaboration による最終版のデータが公開された。このデータから導かれる結論は、これまでのものに比べて大きな変更があったわけではないが、CMB 偏光に関する見積もりが改善されていた。第 6 章にて触れるが、私の研究 [9] では一貫してこの最終版のデータにより見積もられた宇宙論パラメータを使用している。

4.6 Sunyaev-Zel'dovich effect

CMB ゆらぎの情報が含んでいるのは、晴れ上がり時の宇宙の情報だけではない。CMB 光子が晴れ上がり時の宇宙から我々の元に届く間の情報も含んでいるのである。それらの情報の中に、CMB 光子が我々の元に届く間に電子と散乱した際生じる熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果と呼ばれる効果がある。これらの効果は、第 6 章にて紹介する私の研究 [9] に直接関わる効果である。以下ではまず、これらの効果の発見の歴史について紹介する。これら 2 つの効果の詳しい説明に関しては、後の第 5 章を参照してほしい。

1969 年、旧ソ連の Sunyaev と Zel'dovich は、高温の電子による逆コンプトン散乱によって電子のエネルギーが CMB 光子に受け渡され、CMB の黒体放射スペクトルが歪められる可能性を議論した論文を発表した [141]。さらに 3 年後の 1972 年、当時かみのけ座銀河団、おとめ座銀河団、ペルセウス銀河団などの銀河団 X 線観測が進み銀河団中に高温 ($T_e \sim 10^8 \text{K}$) のプラズマが存在していることが知られていたことを受け、Sunyaev と Zel'dovich は銀河団中における CMB の黒体放射スペクトルの歪みの観測可能性を示唆した論文を発表した [142]。というのも、同年 1972 年に Pariysiky によってかみのけ座銀河団の観測において、CMB の輝度減少の検出が未出版ながらも発表されていたのだった。これは、熱的 SZ 効果と呼ばれ、観測可能な CMB 温度スペクトルを歪ませる機構として、最も重要な効果の 1 つである。また、熱的 SZ 効果を生じさせるのが銀河団中などの限られた領域であることから CMB の非等方性を生じさせる効果でもある。実際この論文出版から 1 年後、Pariysky の CMB の輝度減少の検出を報告する論文が出版されている [143]*¹。

熱的 SZ 効果は、生じる物理過程から予想できるように波長依存性がある効果である。相対論的な補正を無視するとするならば、周波数 $\nu = 217 \text{GHz}$ で熱的 SZ 効果はゼロであり、それよりも低周波領域 (Rayleigh-Jeans 領域) では、CMB の輝度が減少 $\Delta I_\nu < 0$ する。一方、高周波領域 (Wien 領域) では輝度が上昇 $\Delta I_\nu > 0$ する。(図 4.1. 詳しくは論文 [144] を参照せよ。)

また、遠くであればあるほど像の見えにくくなる通常の観測とは異なり、銀河団の赤方偏移に依存しないというのも熱的 SZ 効果の大きな特徴の 1 つである。このため、高赤方偏移の銀河団を見つける有用な手法になり得る。通常の観測では見つからないような高赤方偏移の銀河団を多数見つけられれば、銀河計数法による宇宙論テストがこういった遠くの銀河団を使っても可能になる。ここまでメリットばかりを述べてきたが、当然デメリットも存在する。それは、CMB 温度非等方性の宇宙論解析にとって、銀河団の性質を正確にモデル化しないと熱的 SZ 効果がノイズ源として作用してしまうことである。

Sunyaev と Zel'dovich は、1972 年の論文 [142] 中でかみのけ座銀河団における CMB の輝度減少検出を説明するメカニズムとして、熱的 SZ 効果ともう 1 つ存在すると言及していた。それは、銀河団中の電子と CMB 光子が散乱する状況下において、その電子ガスが CMB 光子流体に対して相対速度を持っていた場合に生じるドップラー効果である。これにより、観測する CMB 光子は輝

*¹ しかし、信頼に足るような測定がなされるようになったのは 1960 年代半ば頃からであったらしい。

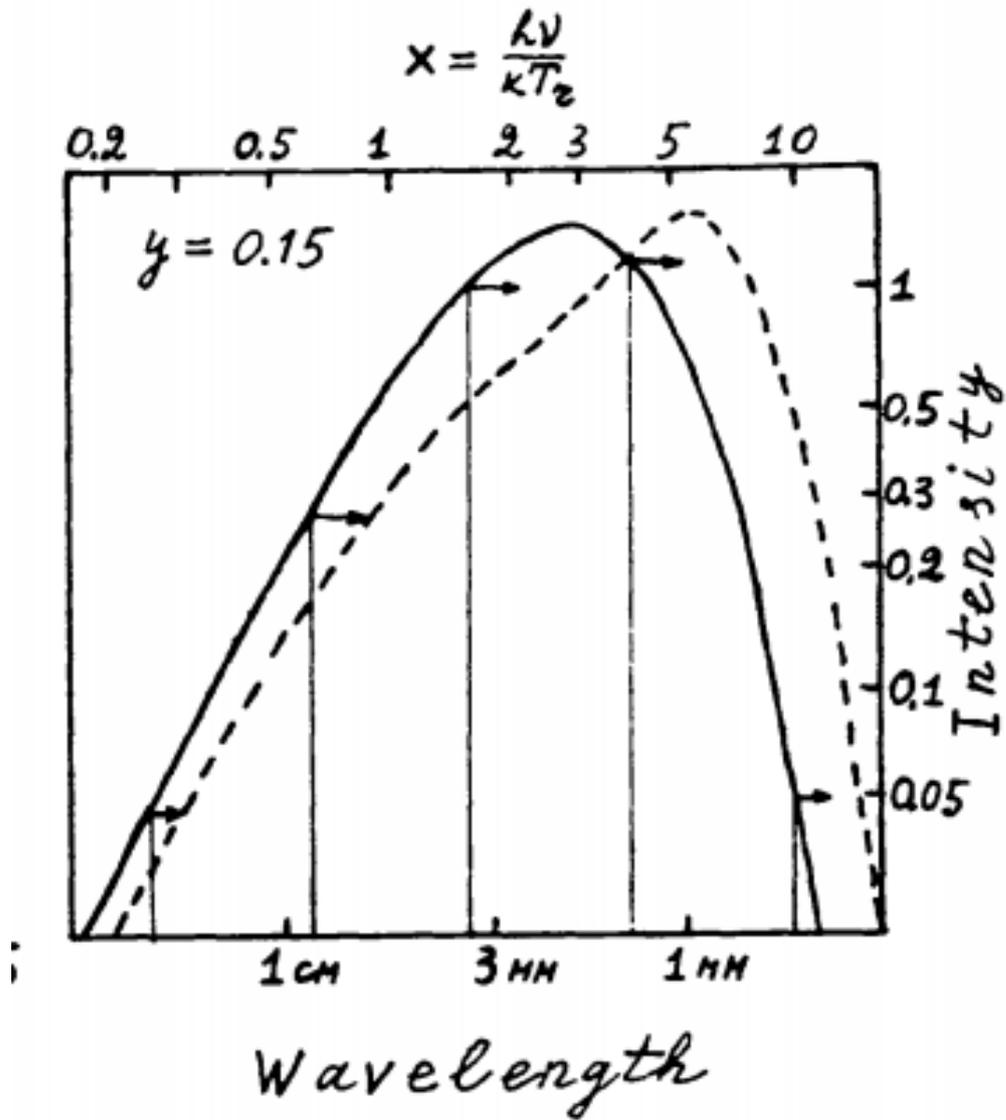


図 4.1 熱的 SZ 効果により歪んだ CMB スペクトル. 論文 [144] の FIG.4 から引用.

度が下がった状態で観測される可能性がある, というのがこの論文中での主張である. 一般に銀河団中の電子に散乱された光子が, 銀河団自体の持つ特異速度によって平均的にドップラー効果を受け, CMB 温度のスペクトルが歪む現象が観測でも確認されている. この現象は運動的 SZ 効果と呼ばれている.

第 5 章

Thermal & Kinetic Sunyaev-Zel'dovich effect

私の研究 [9] に直接関連する CMB 温度揺らぎの生成機構である，熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果について詳しく見ていこう．

5.1 Thermal SZ effect

高温の電子と光子のコンプトン散乱によって電子のエネルギーが CMB 光子に受け渡され，CMB の黒体放射スペクトルが歪められる可能性がある．Kompaneets は，宇宙膨張の効果を無視した状況下で，コンプトン散乱の衝突項の計算をエネルギー輸送の 2 次のオーダーまで展開することで，エネルギー輸送も取り扱える近似的なボルツマン方程式，Kompaneets 方程式を導出した [145]．

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f(1+f) \right) \right], \quad (5.1,1)$$

ここで， f は光子の分布関数， σ_T はトムソン散乱断面積， m_e は電子の質量， T_e は電子の温度， T_γ は光子の温度， dr は視線方向の積分である．また， x は光子のエネルギー E を用いて，

$$x = \frac{E}{T_e} \quad (5.1,2)$$

で定義される量であり，さらに y はコンプトン化パラメータ，もしくはコンプトン y パラメータなどと呼ばれ，（以下，コンプトン y パラメータを略して y パラメータと呼ぶことにする．）

$$y \equiv \sigma_T \int \frac{(T_e - T_{\text{CMB}})}{m_e} n_e dr \simeq \sigma_T \int \frac{T_e}{m_e} n_e dr, \quad (5.1,3)$$

と定義される変数である． y パラメータの物理的意味合いを具体的に見ていこう．

トムソン散乱では，電子の運動エネルギーと光子のエネルギーが同程度の大きさを持つから，電子の温度 T_e は平均的な光子のエネルギー E と同程度の大きさになる．コンプトン散乱における光

子のエネルギーの変化は以下の式で与えられる.

$$\frac{1}{E'_L} - \frac{1}{E_L} = \frac{1 - \cos \theta_L}{m_e} \quad (5.1,4)$$

ここで, E'_L , E_L , そして θ_L は, それぞれ実験室系における入射光子のエネルギー, 散乱光子のエネルギー, そして散乱角である. 光のエネルギー E_L と波長 λ が逆比例することを考慮すると, 式 (5.1,4) より

$$\begin{aligned} \frac{|E_L - E'_L|}{E_L E'_L} &\simeq \frac{1}{m_e} \Leftrightarrow \left| \frac{E_L}{E'_L} - 1 \right| = \frac{E_L}{m_e} \\ &\Leftrightarrow \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda} \sim \frac{E_L}{m_e}, \end{aligned} \quad (5.1,5)$$

となる. したがって, すでに記述した通りトムソン散乱の性質から $T_e/m_e \sim E/m_e$ はおおよそ光子の波長変化量を表す量になる. トムソン散乱では, T_e/m_e は非常に小さいので, 非相対論的な取り扱いができ, 光子の周波数変化は $|\Delta\nu|/\nu = |\Delta\lambda|/\lambda \sim T_e/m_e$ で与えられる.

一方, 式 (5.1,3) 中の残りの部分, つまり $\sigma_T n_e dr$ は, トムソン散乱に対する光学的厚み τ_e が

$$\tau_e = \int \sigma_T n_e dr, \quad (5.1,6)$$

で与えられることより, 光子の進む距離 dr に対する光学的厚みを表している. ちなみに, 光学的厚みとは, 式からも安易に予想できる通り, 対応する距離を進む間にどの程度散乱されるかを表す量である. 以上をまとめると, 式 (5.1,3) で定義される y パラメータは, 光子が視線方向を進んでくる間に生じる平均的な周波数変化量を表すものと解釈することができる. ポイントは, 視線方向を積分するという部分で, 一回のトムソン散乱における光子の振動数変化が小さくても, なんども散乱をうけることにより積分量である y パラメータは大きくなりうる. Sunyaev と Zel'dovich は Kompaneets 方程式 (5.1,1) を CMB に対して応用し, $T_e \gg T_{\text{CMB}}$ の状況下において予言される CMB スペクトルの変形を見積もり, これがのちに熱的 SZ 効果と呼ばれることになった [141]. また, 式 (5.1,3) の y パラメータは, まさに熱的 SZ 効果を定量的に評価する物理量になっている. 実際銀河団中の高温電子ガス $\sim 10^8 \text{K}$ ではおおよそ $y \sim 10^{-4}$ 程度の y パラメータが生じこれにより, 観測可能な熱的 SZ 効果, つまり CMB スペクトルの変形を生じさせうることが知られている [142].

銀河団における CMB スペクトルの変形を数式を用いて説明していく. CMB が銀河団を通過する時間は, 宇宙年齢に比べて十分短いため, 宇宙膨張の効果は無視して良いだろう. その近似のもとでのコンプトン散乱による CMB 光子の分布関数の変化には Kompaneets 方程式 (5.1,1) を適用することができる. ここでは, 最終的に観測者へ届く背景放射光子の分布関数の形を求める. Kompaneets 方程式中の y パラメータを表す式を, 背景放射光子の経路に沿った線積分であることを露わにして,

$$y = \sigma_T \int^r \frac{T_e(r)}{m_e} n_e(r) dr, \quad (5.1,7)$$

と記述することができる。ここで $T_e(r)$, $n_e(r)$ は、観測方向を固定してみたときの視線方向上で観測者から距離 r の位置での電子の温度と電子数密度である。この場合の Kompaneets 方程式は、最終的に観測される背景放射光子の分布関数が、光子の経路上でどのように変化するかを記述した式になっていると受け取ることができる。銀河団中の電子の温度は背景放射よりも十分に高温なので、 $x = E/T_e \ll 1$ であることを考慮すると、Kompaneets 方程式 (5.1,1) 中の T_e を含む項以外を無視することができる。この場合、Kompaneets 方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (5.1,8)$$

と近似することができる。ただし、 f は CMB 光子の分布関数である。ここで、新たな変数

$$\xi \equiv \ln x + 3y, \quad (5.1,9)$$

を導入するとよい。独立変数の組を (x, y) から (ξ, y) に変換し、分布関数を $F(\xi, y) = f(x, y) = f(e^{\xi-3y}, y)$ に書き換える。すると、式 (5.1,8) は

$$\frac{\partial F(\xi, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(\xi, y)}{\partial \xi^2}, \quad (5.1,10)$$

と書くことができる。これはよく知られている拡散方程式の形であり、一般解はグリーン関数の方法に ξ に関するフーリエ変換を用いることによって直線的な解が求められる。

$$F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{-(\xi-\xi')^2/4y} F(\xi', 0). \quad (5.1,11)$$

この解をもとの変数 (x, y) の組みに戻して $f(x, y)$ で表してやり、さらに積分変数を変換すると、

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2/y} f(e^{2s+3y} x, 0), \quad (5.1,12)$$

となる。ここで $F(\xi, 0) = f(x, 0) = f(e^\xi, 0)$ を用いた。これが、式 (5.1,10) の一般解である。CMB は非常に高い精度でプランク分布していることは、すでに第 4 章で記載の通りである。銀河団の外側では、電子の温度と光子の温度の差が銀河団中の電子温度との差に比べて小さいので、光子のエネルギーを E として、式 (5.1,10) で定義される x を $x = E/T_e \approx sE/T$ で近似する。銀河団に入る前の初期分布関数 $f(x, 0)$ は温度 T のプランク分布関数なので、

$$f(x, 0) = \frac{1}{e^x - 1} \equiv f_0(x), \quad (5.1,13)$$

である。銀河団中では、 $T \neq T_e$ であるが、一旦銀河団の外に抜けてしまえば再び $T \approx T_e$ と近似する。銀河団を通過した後の CMB 光子の分布関数は、銀河団中の式 (5.1,3) を視線積分した y パラメータを用いて $f(x, y)$ で与えられる。ただし、この時の x も $x = E/T$ としていることに注意せよ。

実際の典型的な銀河団のサイズ L は数 Mpc であり、銀河団中の典型的な電子数密度 n_e はおよそ $n_e \sim 10^{-3} \text{cm}^3$ 、電子の温度 T_e は $T_e \sim 10 \text{keV}$ である。よって、式 (5.1,3) を視線方向に積分

した y パラメータの値はおよそ $y \sim T_e n_e L \sigma_T / m_e \sim 10^{-4}$ であり、1 よりも十分小さな値になる。よって、式 (5.1,12) 中の積分を直接行わなくても、分布関数 $f(x, y)$ を y に関する 1 次までテイラー展開することにより、

$$f(x, y) \simeq f_0(x) + \frac{\partial f}{\partial y} y, \quad (5.1,14)$$

と近似的に展開することができる。さらに、式 (5.1,8) を代入することにより

$$f(x, y) \simeq f_0(x) + \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial f_0}{\partial x} \right), \quad (5.1,15)$$

という近似解が得られる。したがって分布関数の相対変化量は

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x, y)}{f_0} &\equiv \frac{f(x, y) - f_0(x)}{f_0(x)} \simeq \frac{y}{x^2 f_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \\ &= \frac{xy}{1 - e^{-x}} \left[\frac{x}{\tanh(x/2)} - 4 \right] \rightarrow \begin{cases} -2y & (x \ll 1) \\ x(x-4)y & (x \gg 1), \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1,16)$$

と表せる。ここで二行目の等号の際、具体的に $f_0 = 1/(e^x - 1)$ を代入して計算した。

輝度分布関数 I_ν と分布関数 f は

$$I_\nu = 4\pi\nu^3 f, \quad (5.1,17)$$

という関係にある。よって今求めた $\Delta f/f$ という量は、 $\Delta I_\nu/I_\nu$ にも等しい。ここで今の議論では ν を固定した際の輝度分布関数 I_ν や分布関数 f の差分を考えていることに注意せよ。

ある波長の光に対する輝度関数から見積もられる温度を輝度温度という。

プランクの法則:

$$I_\nu = \frac{4\pi\nu^3}{e^{2\pi\nu/T_{\text{CMB}}} - 1}, \quad (5.1,18)$$

の微小変化をとると

$$\begin{aligned} \Delta I_\nu &= \frac{4\pi\nu^3}{(e^{h\nu/T_{\text{CMB}}} - 1)^2} \frac{h\nu \Delta T_{\text{CMB}}}{T^2} \\ \Leftrightarrow \Delta I_\nu &= \frac{I_\nu}{e^x - 1} \frac{x \Delta T_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta T_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}} &= \frac{1 - e^{-x}}{x} \frac{\Delta I_\nu}{I_\nu}, \end{aligned} \quad (5.1,19)$$

という関係式が得られる。したがって、式 (5.1,16) を光子の輝度温度ゆらぎ p^{TSZ} の言葉で書き表すと、

$$p^{\text{TSZ}} \equiv \frac{\Delta T_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}} = y \left(\frac{x}{\tanh(x/2)} - 4 \right) \rightarrow \begin{cases} -2y & (x \ll 1) \\ (x-4)y & (x \gg 1), \end{cases} \quad (5.1,20)$$

となる。

長波長側のエネルギーの低い Rayleigh-Jeans 領域では、式 (5.1,20) の $x \ll 1$ 極限より、熱的 SZ 効果により光子の輝度温度が減少することがわかる。これは、エネルギーシユな銀河間物質中の電子との逆コンプトン散乱により、低エネルギーの光子が高エネルギー側へ叩き上げられることを表している。長波長の光子の数が減ることにより、長波長側の CMB 輝度温度は下がるが、一方で短波長側の $x \gg 1$ 極限では、叩き上げられた分の光子によって輝度温度が上がっている。結果として、分布関数全体で見ると光子の平均エネルギーが上がっているのである。このように、波長によって異なる効果を受けるため、熱的 SZ 効果は CMB の黒体放射スペクトルを歪ませるように働いていることがわかる。

また、式 (5.1,20) は、CMB が銀河団を通過する際に生じる輝度温度変化を表している。銀河団を出た光子が観測者に届くまでの間、 T と ΔT はともに同じ割合で赤方偏移を受けるため、その比である $\Delta T/T$ は保存する。したがって、SZ 効果により生じる温度ゆらぎは、観測者から銀河団までの距離には寄らず、銀河団自体の性質をそのまま反映するという面白い特徴を持つ。このため、高赤方偏移の銀河団を見つけ出したり、それらの性質を調査する際に有用な手段となりうる。

5.2 Kinetic SZ effect

熱的 SZ 効果は、高温プラズマ中の電子と CMB 光子が逆コンプトン散乱することによって生じる効果であった。かたや運動的 SZ 効果とは、このような散乱が生じる際に高温プラズマ自体が CMB 光子に対して相対速度を持っていることにより生じるドップラー効果である。Sunyaev と Zel'dovich は、1972 年に発表した論文 [142] にて、銀河団が CMB に対して宇宙膨張以外の特異なバルク速度をもって運動しているために生じる運動的 SZ 効果を議論した。これらの議論をさらに細かくまとめた論文も 1980 年に発表されている [146]。視線方向 \hat{n} に対する運動的 SZ 効果による光子の温度ゆらぎ p^{KSZ} は以下のように表される。

$$p^{\text{KSZ}}(\hat{n}) = \frac{\Delta T_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}}(\hat{n}) = \sigma_T \int d\eta e^{-\tau(\eta)} a n_e \hat{n} \cdot \mathbf{v}, \quad (5.2,1)$$

ここで、 \mathbf{v} は電子集団の持つ特異速度である。

一般に、運動的 SZ 効果の計算を行う際は、電子集団の特異速度との積であることに注意して、密度ゆらぎや局所的な電離をあらわに書き表し、電子の数密度を

$$n_e(\hat{n}, \eta) = \bar{n}_e(\eta)[1 + \delta_b(\hat{n}, r) + \delta_{x_e}(\hat{n}, r)], \quad (5.2,2)$$

と展開して書くことが多い。ここで、 \bar{n}_e は背景電子密度、 \bar{x}_e は背景の電離度、 δ_b はバリオンの密度ゆらぎ、 δ_{x_e} は電離度のゆらぎである。さらに背景における光学的厚みが小さく、散乱における光学的厚みの変化も小さいという仮定を置くと、式 (5.2,1) を以下のように書き直せる。

$$p^{\text{KSZ}}(\hat{n}) \simeq \sigma_T \int d\eta a \bar{n}_e(\eta) \hat{n} \cdot \mathbf{q}(\hat{n}, \eta), \quad (5.2,3)$$

ここで、 $\mathbf{q} = \mathbf{v}(1 + \delta_{x_e} + \delta_b)$ である。

運動的 SZ 効果の重要な特性として以下のようなものがある。もし $\delta \ll 1$ を無視してしまうと、速度場のフーリエ成分の寄与のみから全体の非一様性を計算することになる。速度場は音波同様縦波なので、 $\mathbf{v}(\mathbf{k}) \propto \mathbf{k}$ である。よって、視線方向に平行な \mathbf{k} モードだけが非等方性に寄与する。しかし、式 (5.2,3) はフーリエ成分を考慮すると $\int d\eta \bar{n}_e(\eta) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\eta - \eta_0)}$ を含むため、exp の項からわかるように視線方向に平行な成分は視線方向で積分する際その波の山と谷でキャンセルされ、特に小スケールの時に著しく値は小さくなってしまふ。

言い換えれば、小スケールでの角度相関を考える場合は、視線方向に垂直な \mathbf{k} 成分のみが温度ゆらぎに寄与することになるのだが、これは先ほどの文章よりバルク速度からのみでは生じ得ない効果である。つまりは、 \mathbf{q} は視線方向に平行な成分を持っていながらも、 \mathbf{k} は視線方向に垂直である、という状況が必要である。よって、波数ベクトル \mathbf{k} と平行な \mathbf{q} からは温度ゆらぎが生じ得ないので、波数ベクトル \mathbf{k} に垂直な \mathbf{q}_\perp のみが温度ゆらぎを生じさせるのである [147, 148, 149, 150, 151]。運動的 SZ 効果は、1 次の摂動量であるバルク速度 \mathbf{v} と密度・電離度のゆらぎによる効果であると言う意味で 2 次の CMB 温度ゆらぎ効果であると言われている。銀河団の場合、運動的 SZ 効果は熱的 SZ 効果と比べおおよそ 1 桁小さくなる。

同様の効果は、再電離以後の自由電子によっても引き起こされる。自由電子は基本的に特異速度をもっているため、散乱された光子はその特異速度の視線方向成分によってドップラー効果を受ける。我々へ近づく向きの特異速度は温度を上昇させ、離れる向きの特異速度は温度を下げる。平均的にはどちらの特異速度もほぼ同じように存在するので、一般にこれらの効果は打ち消されて温度非等方性への寄与は大きくない。しかし、自由電子の数に空間的な非一様性がある場合は、この打ち消しあいが妨げられて温度非等方性が生まれる。自由電子数の空間的非一様性はいくつかの機構により生じうるが、そのうちの 1 つに再電離 (reionization) が存在する。再電離は星や銀河の形成に伴う放射により起きるため、放射源の天体を中心にして再電離が進む。それゆえ、星や銀河などの分布の非一様性になぞらえて自由電子数の数の非一様性も非常に大きくなる。再電離後、宇宙全体が電離度がほぼ 1 で一様になった後も物質自体の非一応性のために自由電子数はやはり非一様になる。再電離後の物質密度の非一様性を線形理論により見積もった場合に生じる CMB 温度の非一様性へのドップラー効果の寄与は特にオストライカー・ビシュニアック効果 (Ostriker-Vishniac effect) と呼ばれる。この効果は、運動的 SZ 効果同様、速度場と密度場の結合により生じるため、それ自身は線形理論では無視される 2 次の効果である。

第 6 章

Sunyaev-Zel'dovich anisotropy induced by Primordial black holes

この章では、本研究の主題となる PBH により生じる SZ 効果非等方性について具体的にまとめていく。次の 6.1 節にて本研究の目的及び手法を述べ、のちの 6.2 節にて本研究で得られた結果・考察を行う。本研究では、flat Λ CDM モデルを採用し、宇宙論パラメータとして、Planck 2018 Cosmological Parameter に記載されている以下の様なパラメータを用いて計算している。

$$(\Omega_m, \Omega_b, h, n_s, \sigma_8) = (0.32, 0.049, 0.67, 0.97, 0.81)$$

6.1 Purpose and method of my research

第 3 章において、PBH を研究する主目的をおおよそ述べたが、ここではより本研究に着目した研究目的・研究手法を説明する。

本研究では、PBH へのガス降着によるコンプトン散乱やドップラー効果により生じる温度の空間的なゆらぎ、さらにはそれらの空間的なゆらぎに起因する CMB 温度ゆらぎの非等方性に着目した。我々は CMB 温度非等方性の角度パワースペクトルからその強度と形を通して、グローバルなシグナルからは得られないスケールの情報を得ることができる。本研究の目的は、これらの得られた角度パワースペクトルが PBH の各種パラメータ (質量や存在量など) に対してどのような依存性を持っているか調べることである。この依存性を調べることで、現存の小角度スケールの CMB 温度ゆらぎ観測機器である SPT の観測結果と予言したスペクトルを比較し、どのような PBH が存在しているか (もしくは存在していないか) を調査することができる。研究内容としては、3.6.7 節で述べたような、PBH ガス降着による影響を調べる研究の一種である。

本研究の手法を説明する前に今一度 PBH へのガス降着の状況を整理しておこう。PBH ごく近傍のガスは、降着時の重力エネルギー解放により温度が上昇し強い放射を放出する。そのため PBH は UV や X 線の放射源となり、周囲のガスを加熱し電離する。結果として加熱・電離されたガスは CMB 光子に対して、先行研究 [88, 50, 51] で議論されている様なトムソン散乱による

グローバルな光学的厚みだけでなく、熱的 SZ 効果や運動的 SZ 効果を生じさせるのである。ただし、3.6.7 節で述べたように PBH へのガス降着モデルの詳細は未だ解明されていないため、本研究においては PBH ごく近傍のガスからの放射強度をパラメータとすることによりこの不定性を取り扱った。本研究は、大きく分けて 3 つの行程に分けることができる。1 つ目は、PBH 周辺のガスの電離・温度構造を明らかにする行程である。これは、PBH ガス降着により生じる熱的 SZ 効果や運動的 SZ 効果を調べていくために必要である。このために本研究では、1 次元放射輸送方程式を通じてこれらの構造を求めた。2 つ目は、PBH の分布が DM の密度ゆらぎに従っていることを仮定し、PBH による熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果の 2 つの効果から生じる CMB 温度の非等方性を計算する行程である。最後にそのようにして生成された CMB 温度の非等方性が PBH の存在量、質量、そして放射効率のパラメータに対してどのように依存しているかを調べる。そして、SPT による極小スケールの CMB 非等方性の観測データと比較することにより、PBH の光度の放射効率パラメータに応じて、これらの効果が PBH の存在量に制限を設ける可能性について最終的に議論する。

この節の構成は以下の通りである。6.1.1 節では、PBH からの放射光度に関するパラメータを導入し、6.1.2 節では 1 つの PBH の周りのガス温度と電離後を計算する。その後、6.1.3 節にて熱的 SZ 効果、運動的 SZ 効果のプロファイルを見積もる。

6.1.1 The luminosity from a PBH

PBH は重力ポテンシャルを作るので、周囲のガスは PBH に落ち込んでいく。この降着の間、ガスは PBH に近づくにつれて重力エネルギーを解放し、X 線や UV を放射するほど加熱されていく [88, 50, 51]。しかしながら、それらのガス温度は降着円盤の有無などの天文学的な側面や PBH の周囲の環境に強く依存しているため、この放射の光度には理論的な不確定性が含まれてしまっている。先行研究 [88, 50] では、PBH への完全球対称ガス降着を考えた際の PBH の光度を見積もり、それがエディントン光度と比べて非常に小さいことを示していた。一方で、先行研究 [51] では PBH がガスの降着円盤をもつ可能性を指摘し、その場合さきほどの完全球対称ガス降着モデルの場合の光度よりもはるかに高くなる可能性があることを指摘している。さらに、重たい PBH が降着円盤を持つ際、PBH の光度は活動銀河核と同様おおよそサブエディントン光度になることが先行研究 [152] で示唆されている。

それゆえ、この放射効率は赤方偏移や PBH の質量、そして PBH 周辺の物理的な状態に依存している。ここで、我々は簡単のため、この放射効率をフリーパラメータ ϵ として取り扱うことにした。このパラメータはエディントン光度 L_{Edd} と PBH の光度 L_{PBH} を以下のように結びつける。

$$L_{\text{PBH}} = \epsilon L_{\text{Edd}}, \quad (6.1,1)$$

ここでエディントン光度は PBH の質量 M に依存し、

$$L_{\text{Edd}} = 3.2 \times 10^4 L_{\odot} (M/M_{\odot}), \quad (6.1,2)$$

で表される。さらに、本研究では PBH 極近傍からの放射スペクトルに対して周波数に関する冪乗タイプ:

$$L_{\text{PBH},\nu} = \mathcal{A}\nu^{-1.5}, \quad (6.1,3)$$

を採用し, \mathcal{A} は

$$L_{\text{PBH}} = \int_{\nu_L} L_{\text{PBH},\nu} d\nu, \quad (6.1,4)$$

で決定した。ここで ν_L はライマンブレイク周波数である。式 (6.1,3) で表されるような、周波数に関するべき -1.5 のスペクトルは、銀河内のブラックホールで観測されているスペクトルに準じている [153].

6.1.2 IGM temperature and ionization profiles around a PBH

PBH の光度 L_{PBH} のもとでの PBH 周辺 IGM のガス温度と電離度を見積もってこよう。簡単のため、ここでは IGM ガスの構成要素として水素のみを考えている。

IGM 中の電離度 x_e とガス温度 T_{gas} の時間発展方程式は以下の通りである。

$$\frac{dx_e}{dt} = k_{\text{HI},\gamma} - \alpha_B n_{\text{H}} x_e^2, \quad (6.1,5)$$

$$\frac{dT_{\text{gas}}}{dt} = (\gamma - 1) \frac{\mu m_p}{k_B \rho} \left(\frac{k_B T_{\text{gas}}}{\mu m_p} \frac{d\rho}{dt} + \Gamma - \Lambda \right), \quad (6.1,6)$$

ここで, n_{H} , k_B , γ , μ , m_p , ρ そして α_B はそれぞれ, 水素核の数密度, ボルツマン定数, IGM ガスの比熱比 (断熱), $\gamma = 5/3$, 平均分子質量, 陽子質量, ガスの質量密度, そして先行研究 [154] で与えられているケース B の再結合割合である。式 (6.1,5) と式 (6.1,6) 中の, $k_{\text{HI},\gamma}$, Γ そして Λ はそれぞれ電離率, 加熱率, 冷却率である。本研究における冷却過程としては, 再結合冷却, 衝突電離冷却, 衝突励起冷却, そしてコンプトン冷却の 4 つを考えた [154]. (詳しくは付録 B を参照せよ。) 簡単のために, 考えている IGM ガスは一様で, かつガス密度は時刻 t で与えられるその時刻の宇宙論的な背景ガス密度を用いた。

電離, 加熱源としては PBH の極近傍の高温ガスから放射される光子のみを考える。式 (6.1,5) と式 (6.1,6) は球対称仮定のもと解いた。今回の計算では, 宇宙論的なタイムスケールで電離度とガス温度の進化を追うため, 宇宙膨張に乗った系, つまり共動座標系でものごとを考えると便利である。そのため, 空間的な座標を表す量として, 物理的な距離ではなく, PBH からの共動距離を導入する。共動動径距離 r での電離率と加熱率はそれぞれ以下のように書き表すことができる。

$$k_{\text{HI},\gamma}(r) = (1 - x_e(r)) \int_{\nu_L}^{\infty} \mathcal{F}_{\nu}(r) \frac{\sigma_{\text{HI},\nu}}{h\nu} \left(1 + \phi(h\nu, x_e) \frac{\nu}{\nu_L} \right) d\nu, \quad (6.1,7)$$

$$\Gamma(r) = f n_{\text{HI}}(r) \int_{\nu_L}^{\infty} \mathcal{F}_{\nu}(r) \frac{(\nu - \nu_L)}{\nu} \sigma_{\text{HI},\nu} d\nu, \quad (6.1,8)$$

ここで, h , n_{HI} , そして $\sigma_{\text{HI},\nu}$ はそれぞれプランク定数, $n_{\text{HI}}(r) = (1 - x_e(r))n_{\text{H}}$ で与えられる中性水素数密度, そして電離光子の吸収断面積, $\sigma_{\text{HI},\nu} = 6.3 \times 10^{-18}(\nu/\nu_{\text{L}})^{-3} \text{ cm}^2$ である. 上記の式 (6.1,7), (6.1,8) 中の, $\mathcal{F}_\nu(r)$ は PBH からの距離 r での周波数 ν に対する光子のエネルギーフラックスを表している.

$$\mathcal{F}_\nu(r) = \frac{L_{\text{PBH},\nu}}{4\pi a^2(t)r^2} e^{-\tau_{\text{HI},\nu}(r)}. \quad (6.1,9)$$

ここで, スケール因子 $a(t)$ は現在時刻 t_0 の時を $a(t_0) = 1$ として規格化し, $\tau_{\text{HI},\nu}(r)$ は PBH からの距離が r である時の HI ガスの光学的厚みである.

$$\tau_{\text{HI},\nu}(r) = \int_0^r a(t)n_{\text{HI}}(r')\sigma_{\text{HI},\nu} dr'. \quad (6.1,10)$$

また, 式 (6.1,7) 中の $\phi(h\nu, x_e)$ がかかっている項は, 高いエネルギーを持った光子 ($h\nu > 100\text{eV}$) による 2 次的な電離を表している. 我々は, ϕ のフィッティング関数として光子のエネルギーが 0.5keV より大きい時は論文 [155] のものを, それよりも小さい時は論文 [156] のものを適用した. さらに, 式 (6.1,8) 中の f は, IGM ガスの衝突励起を通して吸収されてしまう光子のエネルギーの割合であり, 今回の計算では, 先行研究 [155] で示されているフィッティング関数,

$$f = C(1 - (1 - x_e^a)^b), \quad (6.1,11)$$

を適用した. ここで, $C = 0.9771$, $a = 0.2663$, $b = 1.3163$ である.

式 (6.1,7), (6.1,8) を球対称放射輸送コードを用いて一貫して解くことで, PBH からの動径距離 r , 宇宙時間 t に対する電離度 x_e とガス温度 T_{gas} の構造をすることができる.

図 6.1 は, 横軸を PBH からの物理的な動径距離 $R = a(t)r$ として PBH 周りの電離度の動径構造を示している. この図では, PBH の質量と放射効率として $M = 10 M_\odot$, $\epsilon = 0.0001$ を設定した. 色の違いは赤方偏移の違いを表している. 宇宙が進化するにつれて, 電離度の構造も外側に広がっている. この広がりは赤方偏移 z に対して $(1+z)^{-2}$ に比例している. この振る舞いは, ストロムグレン半径 (Stromgren radius) R_s の赤方偏移進化と一致している. (詳細は付録 B を参照せよ.) ストロムグレン半径は単位時間に放射される光子の数と電子・陽子の再結合率に関係して

$$R_s = \left(\frac{3N_{\text{PBH},\gamma}}{4\pi n_e n_p \alpha_B} \right)^{1/3} \propto (1+z)^{-2}, \quad (6.1,12)$$

と表される. ここで, $N_{\text{PBH},\gamma}$ は

$$N_{\text{PBH},\gamma} = \int_{\nu_{\text{L}}}^{\infty} d\nu \frac{L_{\text{PBH},\nu}}{h\nu}, \quad (6.1,13)$$

を計算することにより得ることができる. ここでは PBH の極近傍の高温ガスからの放射の赤方偏移依存性を考慮していないので, 式 (6.1,12) で与えられるストロムグレン半径の赤方偏移依存性は, 電子と陽子の数密度の赤方偏移依存性, $n_e, n_p \propto (1+z)^3$ のみから来るものである.

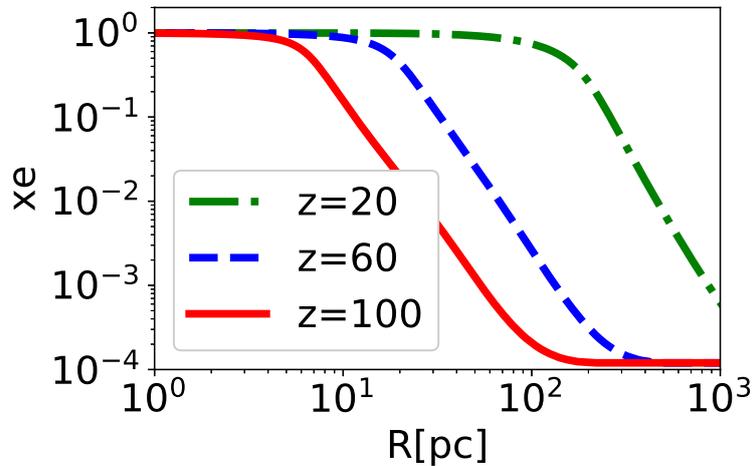


図 6.1 PBH からの”物理的な動径距離” vs PBH 周りの電離度. この図においては, $M = 10M_{\odot}$, $\epsilon = 0.0001$ とした. 赤い実線, 青い破線, 緑の鎖線がそれぞれ $z = 100$, $z = 60$ そして $z = 20$ の電離構造を表している.

図 6.2 は PBH 周りの IGM ガス温度の赤方偏移進化を表していて, 横軸が PBH からの物理的な動径距離 $R = a(t)r$, 縦軸が IGM ガス温度 [eV] である. 電離度の図 6.1 と同様で, PBH の質量と放射効率として $M = 10 M_{\odot}$, $\epsilon = 0.0001$ を設定し, 色の違いは赤方偏移の違いを表している. また, 赤方偏移が小さくなるにつれて, 加熱領域の体積も大きくなっていく. 中心の完全電離領域において, 温度構造は平らになっていて, さらにその温度の赤方偏移はとても弱い. 加熱機構が光子による電離なので, 中性水素領域ほど加熱が効率的である. それゆえ, ガス温度のピークは電離度がおよそ $x_e \simeq 0.1$ 程度になった場所に来る. これゆえ, ガスの温度構造は電離構造よりも外側に広がる. PBH から十分離れた領域では, 図 6.2 中の薄い破線で示される背景の IGM 温度に一致する.

この小節の最後に, 電離度とガス温度の PBH の光度 $L_{\text{PBH}} \propto \epsilon M$ に対する依存性について付け加えておく. 式 (6.1,12) と式 (6.1,13) より, ストロムグレン半径は $(\epsilon M)^{1/3}$ に比例する. 図 6.1 や図 6.2 からわかるように, 電離度やガス温度構造はストロムグレン半径の値に大きく依っており, これらの構造もおおよそ $(\epsilon M)^{1/3}$ に比例して外側に広がる. しかしながら, 温度は加熱と冷却の間の釣り合いによって決まるので, 完全に電離している領域の温度は ϵM に単純に比例しているとは言えない.

6.1.3 Thermal SZ & kinetic SZ effect due to a PBH

図 6.1 と 6.2 は PBH が周囲に高温プラズマを作ることを示している. 第 5 章にて紹介した通り, このプラズマ中を CMB 光子が通過する際, 熱的 SZ 効果が生じる. 結果として, 観測される CMB の輝度温度は周波数 ν において背景の CMB 温度 T_{CMB} から ΔT_{ν} だけずれる. 天球面上に

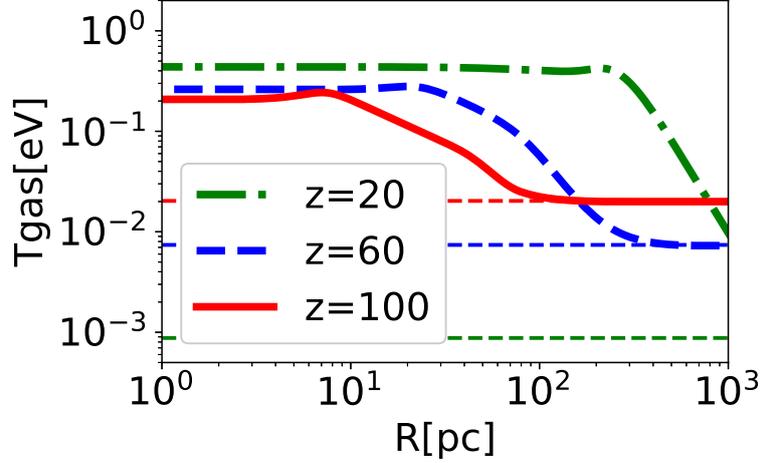


図 6.2 PBH からの”物理的な動径距離” vs PBH 周りのガス温度. この図においては, $M = 10M_{\odot}$, $\epsilon = 0.0001$ とした. 色の意味は電離度の図 6.1 と同じである. 薄い点線はそれぞれの赤方偏移での背景の IGM ガス温度を表している.

において PBH から共動距離 b 離れた場所に, この観測される輝度温度のずれは式 (5.1,3) で定義される y パラメータを用いて,

$$\frac{\Delta T_{\nu}(b)}{T_{\text{CMB}}} = g(\nu)y(b), \quad (6.1,14)$$

と表される. ここで, $g(\nu)$ は式 (5.1,20) より

$$g(\nu) = \frac{h\nu}{k_{\text{B}}T_{\text{gas}}} \tanh^{-1} \left(\frac{h\nu}{2k_{\text{B}}T_{\text{gas}}} \right). \quad (6.1,15)$$

で与えられる関数である. また, 式 (5.1,3) より, 天球面上での共動距離 b における y パラメータは, PBH からのインパクトパラメータ b を用いて,

$$y(b) = \int dx \frac{\sigma_{\text{T}} n_{\text{H}} x_e(\ell)}{m_e} k_{\text{B}} T_{\text{gas}}(\ell), \quad (6.1,16)$$

と表される. ここで, x は視線方向に射影された共動距離であり, ℓ は $\ell^2 = b^2 + x^2$ を満たすような, PBH からの共動動径距離である.

式 (6.1,16) に対して, 図 6.1 や 6.2 で示した電離度とガス温度の構造を代入することにより, y パラメータを計算することができる. 図 6.3 は, $M = 10 M_{\odot}$, $\epsilon = 0.0001$ の設定の元で, 得られた y パラメータを示している. 横軸は, 天球面上の物理的な距離 $R_b = a(t)b$ で縦軸は y パラメータの大きさであり, 色の違いは赤方偏移の違いを表している. 式 (6.1,16) から容易に期待される通り, y パラメータの構造は電離度の構造に依っている. それゆえ, R_b がストロムグレン半径 R_s よりも大きくなると, y パラメータは急速に小さくなる. 宇宙が進化すると, ストロムグレン半径の

進化に従って、 y パラメータが平らになる中心の領域も外側に広がっていく。式 (6.1,16) における積分への寄与の大半は、ストロムグレン半径内の領域、つまり完全電離領域から来ている。

図 6.3 をもとにすると、我々は視線方向上の PBH から生じるトータルの y パラメータを大雑把に見積もることができる。図 6.3 は $M = 10 M_{\odot}$, $\epsilon = 0.0001$ を持つ PBH1 つから生じる y パラメータの大きさがおおよそ $y \sim 10^{-12}$ であることを示している。このような PBH の共動数密度はおおよそ $n_{\text{PBH}} \sim 10^9 f_{\text{PBH}} \text{Mpc}^{-3}$ であるため、PBH 間の典型的な距離はおおよそ 1kpc であることがわかる。最終散乱断面までの視線方向がおおよそ 10^3Mpc であるので、視線方向上の PBH の個数 N はおおよそ $N \sim 10^6$ である。それゆえ、視線方向状を全て積分したトータルの y パラメータは $y \sim 10^{-6}$ である。結果的に、この y パラメータから生じる SZ シグナルは μK のオーダーである。後の 6.1.4 節にて、熱的 SZ 効果による CMB 温度の非等方シグナルを見積もる。

同様に、PBH の周囲の高温プラズマを CMB 光子が通過した際、運動的 SZ 効果も生じる。第 5 章で述べた通り、運動的 SZ 効果により視線方向 \hat{n} 上に生じる CMB 温度ゆらぎの大きさは、式 (5.2,3) より以下のように与えられる。

$$\frac{\Delta T_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}}(\hat{n}) \simeq \sigma_T \int dr e^{-\tau^{(n)}} a \bar{n}_e \hat{n} \cdot \mathbf{q} \quad (6.1,17)$$

ここで、本研究では密度ゆらぎは簡単のため考慮しない、 $\mathbf{q} = \mathbf{v}(1 + \delta_{x_e})$ 。ここでの \mathbf{v} は、PBH 及び PBH 周辺のプラズマの持つバルク速度である。この速度は線形理論による速度、更に言えば、物質の密度ゆらぎ、つまり大規模構造に起因する速度である。よって、おおよそ物質の密度ゆらぎを連続の式に代入することで計算される。この速度の詳しい見積もりや、運動的 SZ 効果による CMB 温度ゆらぎの非等方性シグナルの見積もりに関しては、次の 6.1.4 節にて取り扱う。

6.1.4 Thermal SZ & Kinetic SZ anisotropy due to PBHs

前節で見たように、PBH の周りには高温プラズマが生じ、それにより熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果が生じる。もし、PBH が DM の存在量のうち多くを担っていた場合、それらは 2 つの SZ 効果を通じて観測可能な CMB 温度非等方性を生成する可能性がある。この小節では、これら 2 つの SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトルの見積もり方について説明する。

まずは PBH による熱的 SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトルから計算する。この計算を行うために、我々は先行研究 [157, 158] など銀河団に対して用いられている、"halo formalism" をもとにした手法を用いた。("halo formalism" に関する詳細は付録 A を参照せよ。) これらの先行研究によると、熱的 SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトルは以下の 2 つの寄与の和で記述できる。

$$C_{\ell}^{\text{TSZ}} = g^2(\nu) \left(C_{\ell}^{yy(1\text{P})} + C_{\ell}^{yy(2\text{P})} \right), \quad (6.1,18)$$

ここで、 $C_{\ell}^{yy(1\text{P})}$ は Poisson contribution, つまり 1 つの PBH 内での相関を意味する項で、ここでは "1-PBH" 項と呼ぶことにする*1。 $C_{\ell}^{yy(2\text{P})}$ は Clustering term, つまり 2 つの PBH 間の相関

*1 これと後の "2-PBH" 項は、halo formalism における "1-halo" 項, "2-halo" 項を真似て命名した。

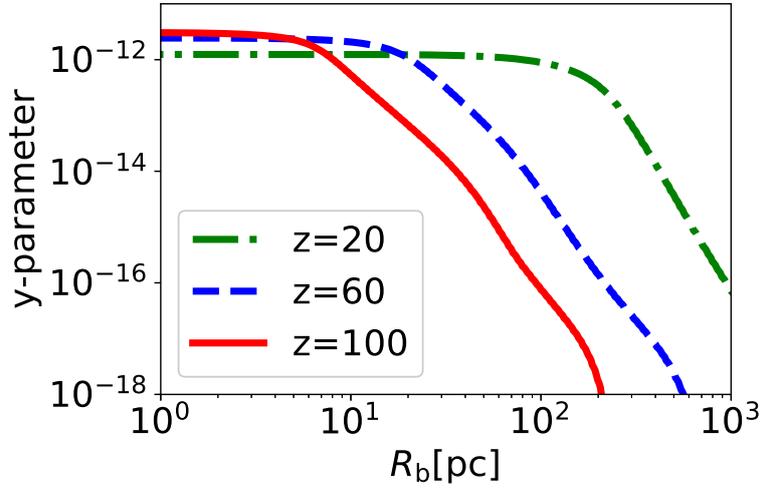


図 6.3 天球面上での PBH からの”物理的な動径距離” vs PBH 周りの y パラメータ. この図においては, $M = 10M_{\odot}$, $\epsilon = 0.0001$ とした. 色の違いは赤方偏移の違いを表し, 電離度の図 6.1 と対応している.

を意味する項で, ”2-PBH” 項と呼ぶことにする. PBH の質量関数がある質量 M のデルタ関数 $\delta_D(M_{\text{PBH}} - M)$ であるとする, これら 2 つの項は以下のように書き下すことができる.

$$C_{\ell}^{yy(1P)} = \int_{z_f}^{z_{\text{ini}}} dz \frac{d^2 V}{dz d\Omega} n_{\text{PBH}} |y_{\ell}(z)|^2, \quad (6.1,19)$$

$$C_{\ell}^{yy(2P)} = \int_{z_f}^{z_{\text{ini}}} dz \frac{d^2 V}{dz d\Omega} P\left(\frac{\ell}{d(z)}\right) n_{\text{PBH}}^2 |y_{\ell}(z)|^2, \quad (6.1,20)$$

ここで, V は共動体積, $d(z)$ は赤方偏移 z までの共動距離, $P(k)$ は物質のパワースペクトル, そして n_{PBH} は質量 M の PBH の共動数密度である. ここでは PBH の存在量が DM の存在量に対して割合 f_{PBH} で存在している状況を考える. それゆえ, PBH の共動数密度は現在の宇宙の臨界密度 ρ_c を用いて, $n_{\text{PBH}} = f_{\text{PBH}} \Omega_{\text{DM}} \rho_c / M$ で与えられる. また, PBH のバイアスを 1 に仮定している. 式 (6.1,19) 及び式 (6.1,20) 中の積分範囲 $[z_{\text{ini}}, z_f]$ に関しては, この小節の後半にて議論することにする.

式 (6.1,19) 及び式 (6.1,20) 中の y_{ℓ} は, 小角度近似を用いることで, 前の 6.1.3 節にて得られた赤方偏移 z , 質量 M の PBH に対する y パラメータの 2 次元フーリエ変換として計算した. (y_{ℓ} の形状に関しては図 6.4 を参照せよ.)

$$y_{\ell}(z) = \int d^2 \theta y(b) \exp(-i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\ell}), \quad (6.1,21)$$

ここで $\boldsymbol{\ell}$ は $\ell = |\boldsymbol{\ell}|$ を満たす 2 次元フーリエモードを表すベクトル, 天球面上の共動距離 b は $b = |\boldsymbol{\theta}| d(z)$ で与えられ, $\boldsymbol{\theta}$ は天球面上の角度方向である. $y(b)$ の構造を用いて式 (6.1,19) 及び

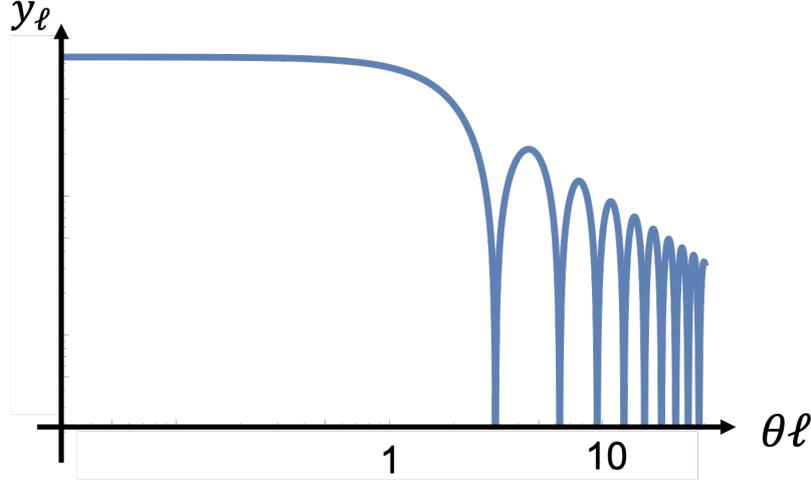


図 6.4 y_ℓ の形. 横軸が $\theta\ell$ であることに注意.

式 (6.1,20) を計算することで, PBH による熱的 SZ 効果により生じる CMB 温度の非等方性を求めることができる. 結果は後の 6.2 節にて載せる.

次に, PBH による運動的 SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトルを計算する. この計算にもさきほど同様, "halo formalism" をもとにした手法を用いる. しかしながら, 先ほどの熱的 SZ 効果の時の計算と異なり, 運動的 SZ 効果は, 式 (6.1,17) からわかるように電離度の構造と速度ベクトルの畳み込みが入っている. これにより, 運動的 SZ 効果により生じる角度パワースペクトルを求めるための計算が少し煩雑になる. よって熱的 SZ 効果の時よりも丁寧に計算を見ていくことにする.

式 (6.1,17) より, 運動的 SZ 効果による温度ゆらぎの 2 点相関関数は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta T_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}}(\hat{n}) \frac{\Delta T_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}}(\hat{n}') \right\rangle &= [\sigma_T \bar{n}_e(\eta_0)]^2 \int d\eta a(\eta)^{-2} e^{-\tau(\eta)} \\ &\int d\eta' a(\eta')^{-2} e^{-\tau(\eta')} \\ &\times \langle \hat{n} \cdot \mathbf{q} \hat{n}' \cdot \mathbf{q}' \rangle (\sqrt{\theta^2(\eta_0 - \eta)^2 + (\eta - \eta')^2}, \eta), \end{aligned} \quad (6.1,22)$$

と与えられる. ここで, η_0 は現在の共動時間, θ は \hat{n} と \hat{n}' の間の角度である. ここで, この研究にて我々が興味があるのは小スケールであるためリンバー関係 (Limber's equation) を用いた.

第 5 章にて記述した通り, 小スケールにおける温度ゆらぎの角度相関に寄与するのは \mathbf{k} モードに垂直な $\mathbf{q}_\perp(\mathbf{k})$ 成分のみである. 先行研究 [159, 150] に従うと, 式 (6.1,22) は以下のような式を満たすフーリエ係数を持つ.

$$\left\langle \frac{\Delta \tilde{T}_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}}(\mathbf{l}) \frac{\Delta \tilde{T}_{\text{CMB}}^*}{T_{\text{CMB}}}(\mathbf{l}') \right\rangle = (2\pi)^2 \delta_D^2(|\mathbf{l} - \mathbf{l}'|) C_\ell^{\text{KSZ}}. \quad (6.1,23)$$

ここで,

$$C_\ell^{\text{KSZ}} = (\sigma_T \bar{n}_e(\eta_0))^2 \int d\eta a(\eta)^{-4} \left(\frac{\bar{x}_e(\eta) e^{-\tau(\eta)}}{d(\eta)} \right)^2 P_{q_\perp}(l/d(\eta), \eta), \quad (6.1,24)$$

である. また, $d(\eta)$ は共動動径距離であり, P_{q_\perp} は $\mathbf{q}_\perp(\mathbf{k})$ のパワースペクトルである.

$$\langle \mathbf{q}_\perp(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{q}_\perp^*(\mathbf{k}') \rangle = 2(2\pi)^3 \delta_D^3(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) P_{q_\perp}(\mathbf{k}). \quad (6.1,25)$$

$\mathbf{q}_\perp(\mathbf{k})$ は以下のように与えられる.

$$\mathbf{q}_\perp(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left[\hat{\mathbf{k}}' - \mu' \hat{\mathbf{k}} \right] \mathbf{v}(\mathbf{k}') \delta_{x_e}(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|), \quad (6.1,26)$$

ここで, $\mu' = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}'$ である. これゆえ, P_{q_\perp} は以下のように与えられる [160, 161].

$$\begin{aligned} P_{q_\perp}(k) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} (1 - \mu'^2) P_{vv}(k') P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \\ &\quad - \frac{(1 - \mu'^2) k'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} P_{\delta_{x_e} v}(k') P_{\delta_{x_e} v}(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \\ &\quad + \int \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{k}''}{(2\pi)^6} \sqrt{(1 - \mu'^2)(1 - \mu''^2)} \cos(\phi' - \phi'') \\ &\quad \times P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e} vv}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', -\mathbf{k} - \mathbf{k}'', \mathbf{k}', \mathbf{k}''), \end{aligned} \quad (6.1,27)$$

ここで, ϕ', ϕ'' はそれぞれ波数ベクトル $\mathbf{k}', \mathbf{k}''$ の極角であり, $P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e} vv}$ は4次のモーメントである. 先行研究 [162] によると, 我々が興味を持っているスケール $k \geq 1 \text{Mpc}^{-1}$ では, 式 (6.1,27) の2番目の交差項と3番目の4次の項は1番目の項に比べて小さい. それゆえ, 本研究においては, P_{q_\perp} として

$$P_{q_\perp}(k) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} (1 - \mu'^2) P_{vv}(k') P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|). \quad (6.1,28)$$

を計算する.

ここで重要なのは, 式 (6.1,28) 中の積分の寄与が主に P_{vv} と $P_{x_e x_e}$ のピーク付近からきており, さらに P_{vv} と $P_{x_e x_e}$ のピークの波数値が十分離れている, ということである. 我々の興味があるスケールは high- l , つまり十分小スケールの領域である. P_{vv} の値がそのような小さなスケールでは, 十分小さくなってしまっていることを考慮すると, 式 (6.1,28) はさらに簡単に近似できて

$$P_{q_\perp}(k) = \frac{1}{3} P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}(k) \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} P_{vv}(k'). \quad (6.1,29)$$

と表せる.

式 (6.1,29) 中の P_{q_\perp} を計算するためには, PBH による電離度のパワースペクトルと線形理論による速度のパワースペクトルを求める必要がある. まずは PBH による電離度のパワースペクトル

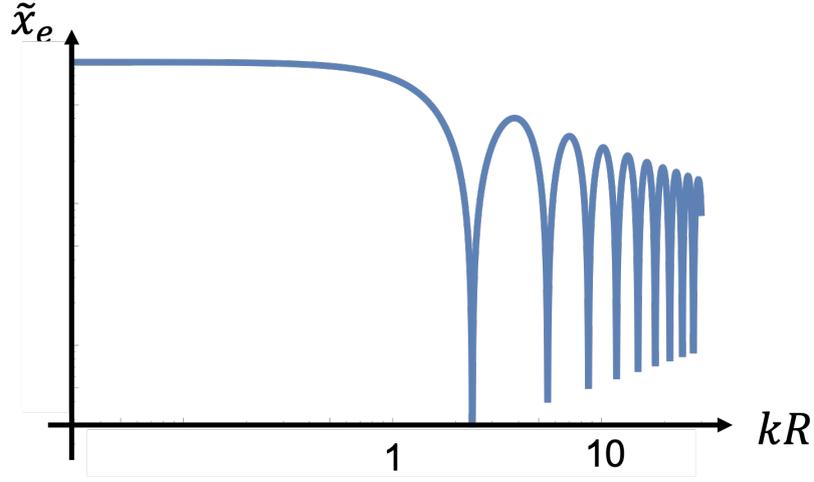


図 6.5 \tilde{x}_e の形. 横軸が kR であることに注意.

を求めていく. 熱的 SZ 効果の際に用いた, "halo formalism" をもとにした手法を利用すると, 電離度のパワースペクトルは以下のような 2 つの寄与の和で表される.

$$P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}} = P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{(1P)} + P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{(2P)}, \quad (6.1,30)$$

ここで, $P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{(1P)}$ は熱的 SZ 効果の時と同様"1-PBH"項であり, $P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{(2P)}$ は"2-PBH"項を表している. PBH の質量として単一質量 M のみを考えると, 式 (6.1,30) 中の"1-PBH"項と"2-PBH"項は以下のように書き表わすことができる.

$$P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{(1P)}(k) = n_{\text{PBH}} \left(\frac{\tilde{\delta}_{x_e}(k)}{\bar{x}_e} \right)^2, \quad (6.1,31)$$

$$P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{(2P)}(k) = \left(\frac{n_{\text{PBH}} \tilde{\delta}_{x_e}(k)}{\bar{x}_e} \right)^2 P(k). \quad (6.1,32)$$

ここで, $\tilde{\delta}_{x_e}$ は, 図 6.1 で表されているような電離度 $\delta_{x_e}(\hat{n}, \eta)$ のフーリエモードであり,

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{x_e}(|\mathbf{k}|) &= \int d^3R \delta_{x_e}(|\mathbf{R}|) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \\ &= 4\pi \int R^2 dR \delta_{x_e}(R) j_0(kR), \end{aligned} \quad (6.1,33)$$

と計算することで求めることができる. (δ_{x_e} の形状は図 6.5 を参照せよ.) ここで, $j_0(x)$ は 0 次の球ベッセル関数である. $P(k)$ は物質のパワースペクトルであり, ここでも式 (6.1,20) と同様, PBH のバイアスが 1 であることを仮定している.

一方, 線形理論における速度のパワースペクトル P_{v_v} に関しては, ボルツマンコード

| | $M[M_{\odot}]$ | ϵ | f_{PBH} |
|-----|----------------|----------------------|----------------------|
| (A) | 10 | 1.0×10^{-4} | 7.6×10^{-2} |
| (B) | 100 | 1.0×10^{-4} | 7.6×10^{-2} |
| (C) | 1000 | 1.0×10^{-4} | 7.6×10^{-2} |
| (D) | 10 | 1.0×10^{-2} | 7.6×10^{-4} |
| (E) | 100 | 1.0×10^{-2} | 7.6×10^{-4} |
| (F) | 1000 | 1.0×10^{-2} | 7.6×10^{-4} |

表 6.1 Fig. 6.6 において計算に用いた, PBH に関するパラメータセット.

(CLASS) [91] を用いることで, 波数積分を実行することができ,

$$\begin{aligned} \int \frac{k'^2 dk'}{2\pi^2} P_{vv}(k', z) &\simeq \langle v_{\text{rms}}^2(z) \rangle \\ &\simeq 5.8 \times 10^{-6} (1+z)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.1,34)$$

という結果を得た. これは, 先行研究 [163] で得られている結果と一致している.

6.2 Results of my research

さきほどの 6.1 節では, PBH へのガス降着による熱的 SZ 効果, 及び運動的 SZ 効果により生じる CMB 温度ゆらぎの角度パワースペクトルの表式をそれぞれ導出した. この節では, これらの得られた表式をもとに, 実際に計算した結果について説明する.

6.2.1 Results about thermal SZ effect induced by PBHs

図 6.6 は熱的 SZ 効果による CMB 温度の角度パワースペクトルである. 色の違いと線種の違いは, パラメータセットの組み合わせの違いを表している. これらのパラメータセットに関しては, 表 6.1 にまとめてある. 図 6.6 の縦軸は, $\ell(\ell+1)C_{\ell}^{\text{TSZ}}/(2\pi)$ を表しており, 単位が $[\mu\text{K}^2]$ であることに注意が必要である. 横軸は, 角度スケール ℓ を表し色 (緑・青・赤) の違い, 及び線の違いはパラメータセットの違いを表している. 黒の鎖線は, CMB 温度の角度パワースペクトルの Primary な成分を表し, エラーバー付きの黒点は SPT [164] のデータを表している.

図 6.6 より, 得られた熱的 SZ 効果によるスペクトルの形は, PBH のパラメータに依らないことがわかる. これは, 2-PBH 項による寄与が 1-PBH 項による寄与よりも十分大きいことから来ている. y パラメータ構造の典型的なスケールは図 6.3 より, おおよそストロムグレン半径であり, これは CMB 観測のスケールよりもはるかに小さいため, このスケールにおいては y_{ℓ} が一定なのである. それゆえ, 式 (6.1,20) の式面から, 角度パワースペクトルの形は物質のパワースペクトルによって決められていることがわかる. 物質のパワースペクトルは, 図 6.7 から分かるように, およそ $k < 10^{-2} [h\text{Mpc}^{-1}]$ では $P_m \propto k$ に比例し, およそ $k > 10^{-1} [h\text{Mpc}^{-1}]$ では $P_m \propto k^{-3}$ に比

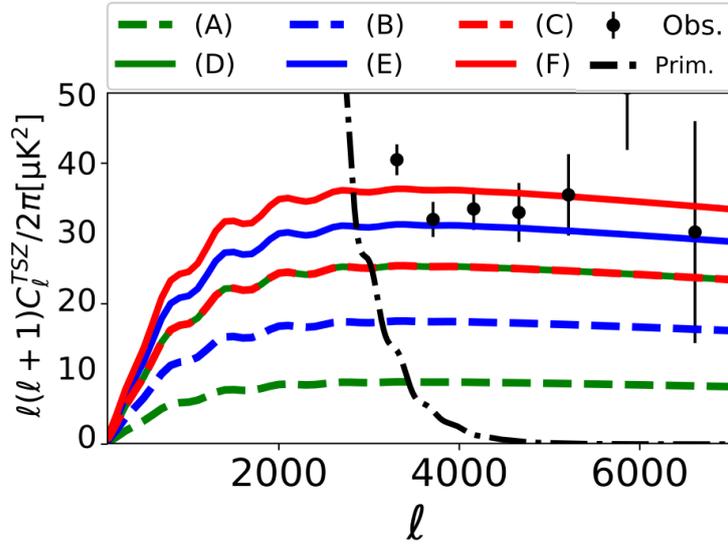


図 6.6 PBH による Thermal SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトル. (A)-(F) のパラメータセットは表 6.1 にまとめられている. 黒い鎖線は CMB 温度の角度パワースペクトルの Primary な成分であり, 黒い丸点とエラーバーは SPT のデータ [164] を表している.

例している. さらに, $10^{-2}[\text{hMpc}^{-1}] < k < 10^{-1}[\text{hMpc}^{-1}]$ の範囲のピークを超えたあたりでは, 物質のパワースペクトル P_m はおよそ k^{-2} に比例している. 面白いことに本研究で着目している小スケール, $\ell \sim \mathcal{O}(10^3\text{-}4)$ はこの波数領域に対応している. ここで, 小スケール近似における波数 k と角度スケール ℓ の関係は $k = \ell/d(z)$ である. それゆえ, $\ell \gg 1$ の時, 着目しているスケールでのこの角度パワースペクトルは

$$\ell(\ell+1)C_\ell^{\text{TSZ}} \propto k^2 \times k^{-2} \sim \text{const.} \quad (6.2,1)$$

となり, スケールに寄らない形を持つのである.

この平らなスペクトルの形状のおかげで, 熱的 SZ 効果による温度非等方性シグナルはシルクスケール $\ell \sim 2000$ よりも小さなスケールにおいて, もともとの温度非等方性シグナル (図 6.6 の黒鎖線) に比べて大きくなることができる.

一方, スペクトルの強度に関しては PBH のパラメータに依っている. 式 (6.1,16) 中の積分により, $y(b)$ が R_s によっていることがわかる. 実際, 図 6.3 を見ると, $y(b)$ の無視できない典型的なスケールはおおよそ R_s であることがわかる. それゆえ, 式 (6.1,21) より, y パラメータの角度フーリエ成分である y_ℓ は $R_s^3 \approx \epsilon M$ に比例している. さらに, PBH の数密度 n_{PBH} は f_{PBH}/M に比例している. 結果として, C_ℓ^{TSZ} は

$$C_\ell^{\text{TSZ}} \simeq C_\ell^{yy(2P)} \propto |n_{\text{PBH}}y_\ell|^2 \propto (\epsilon f_{\text{PBH}})^2 \quad (6.2,2)$$

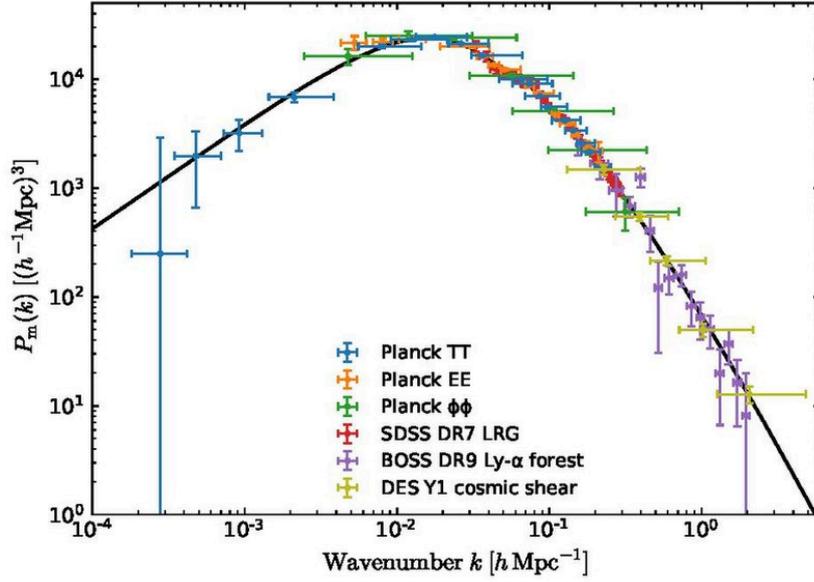


図 6.7 現在の宇宙における物質のパワースペクトル．横軸は波数 $[h\text{Mpc}^{-1}]$ である．論文 [165] より引用．

という依存性を持つことがわかる．また， $\ell > 2000$ の平らな領域の C_ℓ^{TSZ} は，おおよそ

$$\ell^2 C_\ell^{\text{TSZ}} \sim 0.5 \times \left(\frac{f_{\text{PBH}}}{10^{-2}} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{10^{-4}} \right)^2, \quad (6.2,3)$$

であることがわかった．図 6.6 は明らかにこの依存性を示していて， ϵ と f_{PBH} の間の縮退により ケース (C) のスペクトルと ケース (D) のスペクトルが一致している．

我々はこの熱的 SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトルに対する赤方偏移ごとの寄与についても調べた．観測される温度非等方性は視線方向を積分することで得られる．既に述べたように， y_ℓ は R_s^3 に比例して， R_s は宇宙膨張に伴い，スケール因子 $a(t)$ の 2 乗に比例して大きくなる．そのため，赤方偏移 $z = 50$ よりも大きな赤方偏移からの寄与は 1% にも満たないことがわかった．一方で，赤方偏移が小さくなってくると，宇宙はだんだんと電離されていき，最終的に $z \sim 7$ までには完全に電離されることが観測からわかっている．これは再電離と呼ばれている [12]．そのため，本研究においては計算量を減らすためにも $z_{\text{ini}} = 200$ から $z_{\text{f}} = 10$ までの PBH による寄与を式 (6.1,19)(6.1,20) 中の積分範囲として計算した．これは，次の小節にて運動的 SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトルを計算するときにも同様に適用する．

6.2.2 Results about kinetic SZ effect induced by PBHs

図 6.8 は運動的 SZ 効果による CMB 温度の角度パワースペクトルを示している．熱的 SZ 効果の時と同様，いくつかのパラメータセットの組み合わせにおいて計算した．これらのパラメータセットに関しては，表 6.2 にまとめてある．図 6.8 の縦軸は， $\ell(\ell + 1)C_\ell^{\text{KSZ}}/(2\pi)$ を表しており，単位が $[\mu\text{K}^2]$ であることに注意が必要である．横軸は，角度スケール ℓ を表し色及び線種の

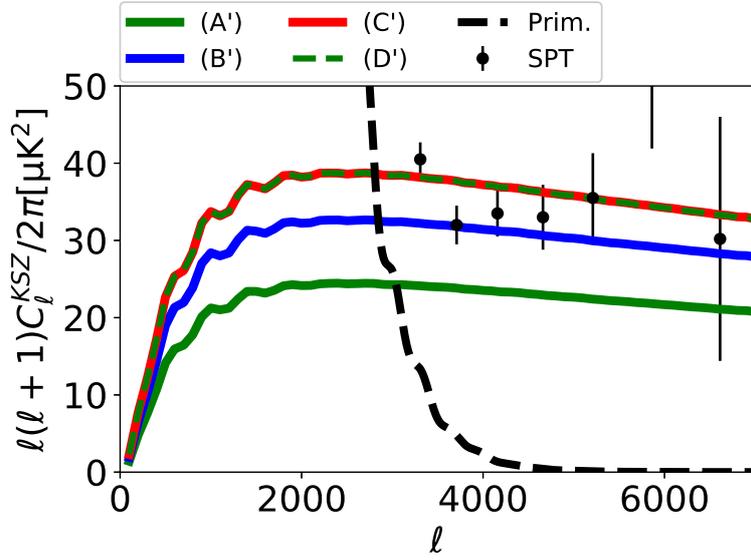


図 6.8 PBH による運動的 SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトル．(A')-(D') のパラメータセットは表 6.2 にまとめられている．黒い鎖線は CMB 温度の角度パワースペクトルの Primary な成分であり，黒い丸点とエラーバーは SPT のデータを表している．

| | $M[M_\odot]$ | ϵ | f_{PBH} |
|------|--------------|----------------------|----------------------|
| (A') | 10 | 1.0×10^{-7} | 7.0×10^{-1} |
| (B') | 100 | 1.0×10^{-7} | 7.0×10^{-1} |
| (C') | 1000 | 1.0×10^{-7} | 7.0×10^{-1} |
| (D') | 10 | 1.0×10^{-5} | 7.0×10^{-3} |

表 6.2 Fig. 6.8 において計算に用いた，PBH に関するパラメータセット．

違いはパラメータセットの違いを表している．黒の鎖線は，CMB 温度の角度パワースペクトルの Primary な成分を表し，エラーバー付きの黒点は SPT [164] のデータを表している．

熱的 SZ 効果による角度パワースペクトルと同様，スペクトルの形は PBH のパラメータに依らないことがわかり，これも 2-PBH 項による寄与が 1-PBH 項による寄与よりも十分大きいことから来ている．電離度構造の典型的なスケールはその定義よりストロムグレン半径で与えられ，これは今着目しているスケールよりもはるかに小さいため，このスケールにおいては \tilde{x}_e が一定なのである．

スペクトルの強度に関しても，熱的 SZ 効果の時と同様に PBH のパラメータに依存している． $\ell > 2000$ の平らな領域の C_ℓ^{KSZ} は，おおよそ

$$\ell^2 C_\ell^{\text{KSZ}} \sim 5.0 \times 10^3 \times \left(\frac{f_{\text{PBH}}}{10^{-2}} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{10^{-4}} \right)^2, \quad (6.2,4)$$

であることがわかった。式 (6.2,3) と式 (6.2,4) や図 6.6 と図 6.8 を見比べると明らかだが、熱的 SZ 効果によるスペクトルと運動的 SZ 効果によるスペクトルの違いはその強度であり、運動的 SZ 効果によるスペクトルの方が強度が強いことがわかる。この強度の違いは、(光速 c をあらわに書くと,) 全て $T_e/m_e c^2$ と v/c の大きさの違いから来ている。おおよそ PBH の周りのプラズマの温度が $T_e \sim 1\text{eV}$ であること、プラズマのバルク速度の二乗平均平方根が式 (6.1,34) よりおおよそ $v \sim 10^{-4}c$ であることより、

$$\frac{T_e}{m_e c^2} \sim 10^{-6}, \quad \frac{v}{c} \sim 10^{-4}, \quad (6.2,5)$$

である。角度パワースペクトルにはこれらの値が二乗で入ってくるので、おおよそそれぞれの角度パワースペクトルの比は 10^{-4} 程度で運動的 SZ 効果のスペクトルの方が大きいと見積もることができ、これは式 (6.2,3) と式 (6.2,4) を比較することにより確認することができる。

熱的 SZ 効果の大元の方程式である Kompaneets 方程式を導く際に、このようなバルク速度は考慮されていないことはここで一言触れておく。それゆえ厳密には、 y パラメータの表式を導く際にバルク速度を考慮した系でボルツマン方程式を考えなければならないが、その煩雑さゆえ今回の研究では見送ることにする、

また、得られた熱的 SZ 効果によるシグナルと運動的 SZ 効果によるシグナルの大小関係が、銀河団による SZ 効果の場合と異なることも触れておく。銀河団の場合は、熱的 SZ 効果によるシグナルの方が運動的 SZ 効果によるシグナルよりも通常大きくなるのだが、この大小の逆転は銀河団内のガス温度 $\sim 10^8\text{K}$ と PBH 周辺のガス温度 $\sim 10^4\text{K}$ の違いから来ている。

6.2.3 The abundance constraint of PBH from this research

これまでに得られた PBH の 2 つの SZ 効果による CMB 温度角度パワースペクトルを用いることで得られる PBH 存在量への制限について議論する。PBH の質量を単一質量 M 、放射効率を ϵ に固定すると我々のモデルにおける取りうる PBH 存在量 f_{PBH} を決定することができる。

PBH による 2 つの SZ 効果は、特に小スケールにて CMB 温度の非等方性を生じさせるため、小スケールの CMB 温度ゆらぎの観測である SPT のデータを用いて PBH 存在量に制限を設けることができる。SPT データは、 $\ell^{\text{SPT}} = 3709$ にて最小値 C_ℓ^{SPT} をとる。それゆえ、2 つの SZ 効果によるスペクトルがともにこれらの小スケールにて平らであることを考慮すると、 $\ell = \ell^{\text{SPT}}$ における $C_\ell^{\text{TSZ}}, C_\ell^{\text{KSZ}} < C_\ell^{\text{SPT}}$ という条件から、 ϵ と M を固定することで f_{PBH} の上限を得ることができる。これより、PBH の質量 M にほとんど依らず以下のような制限を得ることができる。

- 熱的 SZ 効果：

$$f_{\text{PBH}} < 10^{-3} \left(\frac{\epsilon}{10^{-2}} \right)^{-1}, \quad (6.2,6)$$

- 運動的 SZ 効果：

$$f_{\text{PBH}} < 10^{-7} \left(\frac{\epsilon}{10^{-2}} \right)^{-1}. \quad (6.2,7)$$

$1M_{\odot} < M < 10^3 M_{\odot}$ の PBH の質量範囲に対して先行研究 [88, 50] で用いられている $10^{-13} < \epsilon < 10^{-7}$ を課すと, 得られた制限, 特に熱的 SZ 効果による制限 (6.2,6) は意味のない不等式になってしまう. 先行研究 [51, 152] で議論されているような 10^{-5} 以上の大きな ϵ を用いた場合は, SPT のデータを用いた新しい PBH 存在量への制限が得られる. しかしながら, 先行研究 [88, 50] によると, グローバルな光学的厚さに関する CMB 観測から PBH の存在量に対して $f_{\text{PBH}} < 10^{-9}(\epsilon/10^{-2})^{-1}$ という制限を課することができるため, SPT のデータを用いた我々の制限は残念ながらこの制限を超えることができないことがわかった.

第 7 章

Conclusion

本修士論文では、私が博士前期課程の 2 年間で手がけてきたオリジナルの研究 [9] の成果を関連分野のレビューを踏まえながらまとめた。第 2 章では、標準宇宙論について紹介し、その中で DM の重要性について唱えた。第 3 章では、DM の候補の 1 つである PBH について、研究を行う動機や形成過程、そして存在量制限に関してまとめた。特に PBH の存在量制限に関しては、今現在非常に様々な手法が存在している。そのため、3.6 節では現在確立している手法に関してなるべく網羅的にまとめた。第 4 章では、CMB と CMB ゆらぎに関して、その発見の歴史から紹介した。その中で、CMB ゆらぎの持つ情報の中に熱的 SZ 効果や運動的 SZ 効果の情報が含まれることを紹介した。次の第 5 章では、熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果が CMB の温度ゆらぎを生成する理由を数式を用いて詳しく説明した。第 6 章では、私が行った研究、「原始ブラックホールにより生じる SZ 効果非等方性」の研究目的と手法、そして得られた結果と考察を説明した。以下は本研究のまとめである。

本研究では、PBH による熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトルを調べた。PBH に降着しているガスは重力エネルギーの解放により加熱される。結果として、加熱された PBH 極近傍のガスは UV や X 線を放射する。これらの光子は PBH 周りの IGM を加熱し電離する。電離加熱された IGM は熱的 SZ 効果や運動的 SZ 効果を通して CMB 温度の 2 次的な非等方性を生じさせる。

本研究における研究手順は以下の通りであった。はじめに放射効率に関する自由パラメータを用いて PBH 極近傍からの放射の光度を仮定し、1 次元輻射輸送方程式を解くことによって PBH 周りの IGM の電離・温度構造を見積もった。これらの構造をもとにして、PBH の周りの y パラメータ構造を得た。halo formalism をもとにして、PBH の存在量を仮定することにより最終的に PBH の熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果による CMB 温度の角度パワースペクトルを計算した。

PBH によるそれらのスペクトルがシルクスケールよりも小さなスケールにて、PBH が存在しない場合に理論予測される CMB 温度の角度パワースペクトルよりも大きくなることを示した。そのようなスケールにおける角度相関は主に異なる 2 つの PBH 間の相関により作られるため、スペクトルの形は物質のパワースペクトルに依っている。さらに、スペクトルの強度は PBH の存在量と PBH に降着しているガスからの放射効率に依存していることを示した。スケー

ル不変な原始曲率パワースペクトルを考えた場合、角度パワースペクトル $\ell^2 C_\ell$ は小スケールにて、熱的 SZ 効果の場合は $\ell^2 C_\ell^{\text{TSZ}} \sim 0.5 \times (f_{\text{PBH}}/10^{-2})^2 (\epsilon/10^{-4})^2$ 、運動的 SZ 効果の場合は $\ell^2 C_\ell^{\text{TSZ}} \sim 5.0 \times 10^3 \times (f_{\text{PBH}}/10^{-2})^2 (\epsilon/10^{-4})^2$ の強度で平らな形をしていることがわかった。先行研究 [88, 50] で用いられている ϵ の値を用いると、現在の観測機器にて観測可能なシグナルを得ることは難しいことがわかった。しかしながら、 ϵ の値は理論的な不確定性を含んでおり、 ϵ の値が 10^{-5} よりも大きくなりうることを示唆する先行研究 [51, 152] も存在する。そのような場合には、PBH により小スケールの CMB 温度ゆらぎの非等方性において観測可能なシグナルを作られる可能性がある。

我々はさらにこれらの SZ 効果から課される PBH 存在量に対する存在量制限についても調べた。我々が得た f_{PBH} への制限は、熱的 SZ 効果の場合： $f_{\text{PBH}} \lesssim 10^{-3}(\epsilon/10^{-2})$ 、運動的 SZ 効果の場合： $f_{\text{PBH}} \lesssim 10^{-7}(\epsilon/10^{-2})$ であった。しかしながら、CMB の光学的厚みから設けた制限は同じ ϵ を使った場合により強い制限を与える。それゆえ、現在の小スケール CMB 温度ゆらぎの観測からは PBH の存在量に対する制限を更新しないことがわかった。

我々の PBH の存在量に対する制限は光学的厚みから設けた制限よりも弱かったが、我々の研究が将来の小スケール CMB 温度ゆらぎの観測を用いて PBH の存在を説明する糸口になり得ることは主張しておきたいことである。我々は PBH による熱的 SZ 効果と運動的 SZ 効果により生じる CMB 温度の角度パワースペクトルが、 $\ell \lesssim 2000$ の小スケールにて平らになることを示した。この平らなスペクトルは、およそ PBH の周りの電離バブルの大きさまで広がる。銀河団による SZ 効果は同様のスケールにおいて、大きな CMB 温度非等方性を作り出すが、それらのスペクトルのピークはおよそ $\ell \sim 4000$ である。それゆえ、 $\ell \sim 4000$ よりも小さなスケールでの平らな CMB 温度角度パワースペクトルの検出（または非検出）は PBH の有無を説明する有益な情報になりうるであろう。

本研究では、自由パラメータ ϵ を導入することで、PBH 極近傍の高温ガスから放射される光子の光度を取り扱った。先行研究 [88, 50, 51] では、シンプルなモデルの元でこの放射効率 ϵ を解析的に調べていた。しかし、この放射効率をしっかりと調べるためには、PBH の周りのガス降着の物理をシミュレーション等を使って、十分初期の宇宙から調べないといけない。これらのシミュレーションを数値的に行い、さらに詳しく PBH ガス降着による宇宙論的な影響を調べることは後の研究にて行うことにする。

Acknowledge

本研究を行うにあたって、まず共同研究者かつ研究室の指導教員である田代寛之特任准教授に心より感謝します。田代寛之特任准教授には研究室配属(学部4年)から現在に至るまで、熱心にご指導・ご鞭撻をしていただきました。私の稚拙な質問から論文の執筆まで非常に多くの助言をいただき、物理的な思考力を伸ばすとともに博士前期課程中に論文を出版するまで至りました。長谷川賢二特任助教には本研究における数値計算に関して1から教えていただきました。横山秀一郎助教には原始ブラックホールの制限や生成方法に関して様々な議論をしていただきました。また、私が所属している名古屋大学宇宙論研究室の皆様には感謝いたします。共同研究者の田中俊行さんには数値計算のチェックから論文執筆時の英語のチェックまで色々教えていただきました。また、箕田鉄兵さんには熱的SZ効果や運動的SZ効果について有益なコメントをしていただきました。それ以外でも自主ゼミなどでお世話になった研究室のメンバーにもあつく御礼申し上げます。最後に、博士前期課程の学生生活において最も時間を共有した同期の近藤寛人くん、福永隼人くん、吉田貴一くんには感謝を述べて筆を置きたいと思います。

References

- [1] G. Steigman and M. S. Turner. Cosmological constraints on the properties of weakly interacting massive particles. *Nuclear Physics B*, 253:375–386, 1985.
- [2] R. D. Peccei and H. R. Quinn. Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Physical Review Letters*, 16:1791–1797, September 1977.
- [3] R. D. Peccei and H. R. Quinn. CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Physical Review Letters*, 38:1440–1443, June 1977.
- [4] Steven Weinberg. A new light boson? *Phys. Rev. Lett.*, 40:223–226, Jan 1978.
- [5] F. Wilczek. Problem of strong p and t invariance in the presence of instantons. *Phys. Rev. Lett.*, 40:279–282, Jan 1978.
- [6] Y. Chikashige, R.N. Mohapatra, and R.D. Peccei. Are there real goldstone bosons associated with broken lepton number? *Physics Letters B*, 98(4):265 – 268, 1981.
- [7] B. Carr, F. Kühnel, and M. Sandstad. Primordial black holes as dark matter. *Physical Review D*, 94(8):083504, October 2016.
- [8] K. Belczynski, D. E. Holz, T. Bulik, and R. O’Shaughnessy. The first gravitational-wave source from the isolated evolution of two stars in the 40-100 solar mass range. *Physical Review Letters*, 116(24):241101, June 2016.
- [9] Katsuya T. Abe, Hiroyuki Tashiro, and Toshiyuki Tanaka. Thermal sunyaev-zel’ dovich anisotropy due to primordial black holes. *Physical Review D*, 99(10), May 2019.
- [10] A. Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.
- [11] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Oxford, 2005.
- [12] Planck Collaboration and N. et al. Aghanim. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *ArXiv e-prints*, July 2018.
- [13] <http://osksn2.hep.sci.osaka-u.ac.jp/naga/kogi/konan-class06/ch8-darkmatter.pdf>.
- [14] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, Jan 1981.
- [15] A.D. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon,

- flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, 108(6):389 – 393, 1982.
- [16] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov. Quantum fluctuations and a nonsingular universe. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 33:549–553, May 1981.
- [17] A.A. Starobinsky. Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations. *Physics Letters B*, 117(3):175 – 178, 1982.
- [18] S.W. Hawking. The development of irregularities in a single bubble inflationary universe. *Physics Letters B*, 115(4):295 – 297, 1982.
- [19] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, and R.H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, 215(5):203 – 333, 1992.
- [20] Andreas Albrecht and Paul J. Steinhardt. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220–1223, Apr 1982.
- [21] F. Lucchin and S. Matarrese. Power-law inflation. *Phys. Rev. D*, 32:1316–1322, Sep 1985.
- [22] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology, Second Edition*. 2003.
- [23] Y. B. Zel’dovich and I. D. Novikov. The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model. , 10:602, February 1967.
- [24] S. Hawking. Gravitationally collapsed objects of very low mass. , 152:75, 1971.
- [25] G. F. Chapline. Cosmological effects of primordial black holes. , 253:251, January 1975.
- [26] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, and et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, 116(6):061102, February 2016.
- [27] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, and et al. Binary Black Hole Mergers in the First Advanced LIGO Observing Run. *Physical Review X*, 6(4):041015, October 2016.
- [28] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, and et al. Gw170104: Observation of a 50-solar-mass binary black hole coalescence at redshift 0.2. *Phys. Rev. Lett.*, 118:221101, Jun 2017.
- [29] Takashi Nakamura, Misao Sasaki, Takahiro Tanaka, and Kip S. Thorne. Gravitational waves from coalescing black hole macho binaries. *The Astrophysical Journal*, 487(2):L139–L142, Oct 1997.
- [30] Tomohiro Harada, Chul-Moon Yoo, and Kazunori Kohri. Threshold of primordial black hole formation. *Physical Review D*, 88(8), Oct 2013.
- [31] P. J. E. Peebles. The Gravitational Instability of the Universe. , 147:859, Mar 1967.
- [32] C. Gundlach. Critical phenomena in gravitational collapse - Living Reviews. *arXiv*

- e-prints*, pages gr-qc/0001046, Jan 2000.
- [33] Carsten Gundlach. Critical phenomena in gravitational collapse. , 376(6):339–405, Mar 2003.
 - [34] Matthew W. Choptuik. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, 70:9–12, Jan 1993.
 - [35] J. C. Niemeyer and K. Jedamzik. Dynamics of primordial black hole formation. , 59(12):124013, Jun 1999.
 - [36] Tatsuhiko Koike, Takashi Hara, and Satoshi Adachi. Critical Behavior in Gravitational Collapse of Radiation Fluid: A Renormalization Group (Linear Perturbation) Analysis. , 74(26):5170–5173, Jun 1995.
 - [37] Ilia Musco and John C. Miller. Primordial black hole formation in the early universe: critical behaviour and self-similarity. *Classical and Quantum Gravity*, 30(14):145009, Jul 2013.
 - [38] Ilia Musco, John C. Miller, and Luciano Rezzolla. Computations of primordial black-hole formation. *Classical and Quantum Gravity*, 22(7):1405–1424, Apr 2005.
 - [39] Ilia Musco, John C. Miller, and Alexander G. Polnarev. Primordial black hole formation in the radiative era: investigation of the critical nature of the collapse. *Classical and Quantum Gravity*, 26(23):235001, Dec 2009.
 - [40] J. C. Niemeyer and K. Jedamzik. Near-Critical Gravitational Collapse and the Initial Mass Function of Primordial Black Holes. , 80(25):5481–5484, Jun 1998.
 - [41] Misao Sasaki, Teruaki Suyama, Takahiro Tanaka, and Shuichiro Yokoyama. Primordial black holes—perspectives in gravitational wave astronomy. *Classical and Quantum Gravity*, 35(6):063001, Mar 2018.
 - [42] P. Tisserand, L. Le Guillou, C. Afonso, J. N. Albert, J. Andersen, R. Ansari, É. Aubourg, P. Bareyre, J. P. Beaulieu, X. Charlot, C. Coutures, R. Ferlet, P. Fouqué, J. F. Glicenstein, B. Goldman, A. Gould, D. Graff, M. Gros, J. Haissinski, C. Hamadache, J. de Kat, T. Lasserre, É. Lesquoy, C. Loup, C. Magneville, J. B. Marquette, É. Maurice, A. Maury, A. Milsztajn, M. Moniez, N. Palanque-Delabrouille, O. Perdureau, Y. R. Rahal, J. Rich, M. Spiro, A. Vidal-Madjar, L. Vigroux, S. Zylberajch, and EROS-2 Collaboration. Limits on the Macho content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds. , 469:387–404, July 2007.
 - [43] L. Wyrzykowski, J. Skowron, S. Kozłowski, A. Udalski, M. K. Szymański, M. Kubiak, G. Pietrzyński, I. Soszyński, O. Szewczyk, K. Ulaczyk, and et al. The ogle view of microlensing towards the magellanic clouds - iv. ogle-iii smc data and final conclusions on machos ★. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(4):2949–2961, Aug 2011.
 - [44] Kim Griest, Agnieszka M. Cieplak, and Matthew J. Lehner. Experimental limits on

- primordial black hole dark matter from the first 2 yr of kepler data. *The Astrophysical Journal*, 786(2):158, Apr 2014.
- [45] H. Niikura, M. Takada, N. Yasuda, R. H. Lupton, T. Sumi, S. More, T. Kurita, S. Sugiyama, A. More, M. Oguri, and M. Chiba. Microlensing constraints on primordial black holes with the Subaru/HSC Andromeda observation. *arXiv e-prints*, January 2017.
- [46] Sunao Sugiyama, Toshiki Kurita, and Masahiro Takada. Revisiting the wave optics effect on primordial black hole constraints from optical microlensing search. *arXiv e-prints*, page arXiv:1905.06066, May 2019.
- [47] Masamune Oguri, Jose M. Diego, Nick Kaiser, Patrick L. Kelly, and Tom Broadhurst. Understanding caustic crossings in giant arcs: Characteristic scales, event rates, and constraints on compact dark matter. *Physical Review D*, 97(2), Jan 2018.
- [48] B. J. Carr and M. Sakellariadou. Dynamical Constraints on Dark Matter in Compact Objects. , 516(1):195–220, May 1999.
- [49] Timothy D. Brandt. Constraints on macho dark matter from compact stellar systems in ultra-faint dwarf galaxies. *The Astrophysical Journal*, 824(2):L31, Jun 2016.
- [50] Y. Ali-Haïmoud and M. Kamionkowski. Cosmic microwave background limits on accreting primordial black holes. , 95(4):043534, February 2017.
- [51] Vivian Poulin, Pasquale D. Serpico, Francesca Calore, Sebastien Clesse, and Kazunori Kohri. CMB bounds on disk-accreting massive primordial black holes. *Phys. Rev.*, D96(8):083524, 2017.
- [52] Daniele Gaggero, Gianfranco Bertone, Francesca Calore, Riley M.T. Connors, Mark Lovell, Sera Markoff, and Emma Storm. Searching for primordial black holes in the radio and x-ray sky. *Physical Review Letters*, 118(24), Jun 2017.
- [53] Yoshiyuki Inoue and Alexander Kusenko. New x-ray bound on density of primordial black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(10):034–034, Oct 2017.
- [54] Paulo Montero-Camacho, Xiao Fang, Gabriel Vasquez, Makana Silva, and Christopher M. Hirata. Revisiting constraints on asteroid-mass primordial black holes as dark matter candidates. , 2019(8):031, Aug 2019.
- [55] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda, and J. Yokoyama. New cosmological constraints on primordial black holes. , 81(10):104019, May 2010.
- [56] E. Roulet and S. Mollerach. Microlensing. , 279:67–118, Jan 1997.
- [57] M. Vietri and J. P. Ostriker. The statistics of gravitational lenses - Appaarent changes in the luminosity function of distant sources due to passage of light through a single galaxy. , 267:488–510, Apr 1983.
- [58] R. Nityananda and J. P. Ostriker. Gravitational lensing by stars in a galaxy halo - Theory

- of combined weak and strong scattering. *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 5:235–250, Sep 1984.
- [59] B. Paczynski. Gravitational Microlensing by the Galactic Halo. , 304:1, May 1986.
- [60] Hans J. Witt and Shude Mao. Can Lensed Stars Be Regarded as Pointlike for Microlensing by MACHOs? , 430:505, Aug 1994.
- [61] William H. Press and James E. Gunn. Method for Detecting a Cosmological Density of Condensed Objects. , 185:397–412, Oct 1973.
- [62] Aggeliki Kassiola, Israel Kovner, and Roger D. Blandford. Bounds on Intergalactic Compact Objects from Observations of Compact Radio Sources. , 381:6, Nov 1991.
- [63] P. N. Wilkinson, D. R. Henstock, I. W. Browne, A. G. Polatidis, P. Augusto, A. C. Readhead, T. J. Pearson, W. Xu, G. B. Taylor, and R. C. Vermeulen. Limits on the Cosmological Abundance of Supermassive Compact Objects from a Search for Multiple Imaging in Compact Radio Sources. , 86(4):584–587, Jan 2001.
- [64] Andrey Katz, Joachim Kopp, Sergey Sibiryakov, and Wei Xue. Femtolensing by dark matter revisited. , 2018(12):005, Dec 2018.
- [65] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars : the physics of compact objects*. 1983.
- [66] Peter W. Graham, Surjeet Rajendran, and Jaime Varela. Dark matter triggers of supernovae. , 92(6):063007, Sep 2015.
- [67] Fabio Capela, Maxim Pshirkov, and Peter Tinyakov. Constraints on primordial black holes as dark matter candidates from capture by neutron stars. , 87(12):123524, Jun 2013.
- [68] Chris Kouvaris and Peter Tinyakov. Growth of black holes in the interior of rotating neutron stars. , 90(4):043512, Aug 2014.
- [69] Paolo Pani and Abraham Loeb. Tidal capture of a primordial black hole by a neutron star: implications for constraints on dark matter. , 2014(6):026, Jun 2014.
- [70] Fabio Capela, Maxim Pshirkov, and Peter Tinyakov. A comment on “Exclusion of the remaining mass window for primordial black holes ...”, arXiv:1401.3025. *arXiv e-prints*, page arXiv:1402.4671, Feb 2014.
- [71] Guillaume Defillon, Etienne Granet, Peter Tinyakov, and Michel H. G. Tytgat. Tidal capture of primordial black holes by neutron stars. , 90(10):103522, Nov 2014.
- [72] George M. Fuller, Alexander Kusenko, and Volodymyr Takhistov. Primordial Black Holes and r -Process Nucleosynthesis. , 119(6):061101, Aug 2017.
- [73] James Binney and Scott Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. 2008.
- [74] Jaiyul Yoo, Julio Chaname, and Andrew Gould. The end of the macho era: Limits on halo dark matter from stellar halo wide binaries. *The Astrophysical Journal*, 601(1):311–318, Jan 2004.

- [75] Julio Chaname and Andrew Gould. Disk and halo wide binaries from the revised luyten catalog: Probes of star formation and macho dark matter. *The Astrophysical Journal*, 601(1):289–310, Jan 2004.
- [76] D. P. Quinn, M. I. Wilkinson, M. J. Irwin, J. Marshall, A. Koch, and V. Belokurov. On the reported death of the macho era. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 396(1):L11–L15, Jun 2009.
- [77] K. Bechtol, A. Drlica-Wagner, E. Balbinot, A. Pieres, J. D. Simon, B. Yanny, B. Santiago, R. H. Wechsler, J. Frieman, A. R. Walker, and et al. Eight new milky way companions discovered in first-year dark energy survey data. *The Astrophysical Journal*, 807(1):50, Jun 2015.
- [78] Sergey E. Koposov, Vasily Belokurov, Gabriel Torrealba, and N. Wyn Evans. Beasts of the southern wild: Discovery of nine ultra faint satellites in the vicinity of the magellanic clouds. *The Astrophysical Journal*, 805(2):130, May 2015.
- [79] Savvas M. Koushiappas and Abraham Loeb. Dynamics of dwarf galaxies disfavor stellar-mass black holes as dark matter. *Physical Review Letters*, 119(4), Jul 2017.
- [80] Lars Hernquist. An Analytical Model for Spherical Galaxies and Bulges. , 356:359, Jun 1990.
- [81] Guohong Xu and Jeremiah P. Ostriker. Dynamics of Massive Black Holes as a Possible Candidate of Galactic Dark Matter. , 437:184, Dec 1994.
- [82] Subrahmanyan Chandrasekhar. *Principles of stellar dynamics*. 1960.
- [83] C. G. Lacey and J. P. Ostriker. Massive black holes in galactic halos ? , 299:633–652, Dec 1985.
- [84] B. Nordström, M. Mayor, J. Andersen, J. Holmberg, F. Pont, B. R. Jørgensen, E. H. Olsen, S. Udry, and N. Mowlavi. The geneva-copenhagen survey of the solar neighbourhood. *Astronomy Astrophysics*, 418(3):989–1019, Apr 2004.
- [85] C. G. Lacey. The influence of massive gas clouds on stellar velocity dispersions in galactic discs. , 208:687–707, Jun 1984.
- [86] James Binney, Walter Dehnen, and Gianpaolo Bertelli. The age of the solar neighbourhood. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 318(3):658–664, 11 2000.
- [87] B. J. Carr. Pregalactic black hole accretion and the thermal history of the universe. , 194:639–668, Feb 1981.
- [88] M. Ricotti, J. Ostriker, and K. Mack. Effect of Primordial Black Holes on the Cosmic Microwave Background and Cosmological Parameter Estimates. page U5.004, January 2017.
- [89] Daniel Aloni, Kfir Blum, and Raphael Flauger. Cosmic microwave background constraints on primordial black hole dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(05):017–017, May 2017.

- [90] Yacine Ali-Haïmoud and Christopher M. Hirata. Hyrec: A fast and highly accurate primordial hydrogen and helium recombination code. *Physical Review D*, 83(4), Feb 2011.
- [91] Diego Blas, Julien Lesgourgues, and Thomas Tram. The cosmic linear anisotropy solving system (class). part ii: Approximation schemes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(07):034–034, Jul 2011.
- [92] N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, N. Bartolo, and et al. Planck2015 results. *Astronomy Astrophysics*, 594:A11, Sep 2016.
- [93] Yutaka Fujita, Susumu Inoue, Takashi Nakamura, Tadahiro Manmoto, and Kenji E. Nakamura. Emission from isolated black holes and macho[cl]s[cl] accreting from the interstellar medium. *The Astrophysical Journal*, 495(2):L85–L89, Mar 1998.
- [94] R. P. Fender, T. J. Maccarone, and I. Heywood. The closest black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 430(3):1538–1547, Feb 2013.
- [95] E. G. Kording, R. P. Fender, and S. Migliari. Jet-dominated advective systems: radio and x-ray luminosity dependence on the accretion rate. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 369(3):1451–1458, Jul 2006.
- [96] A. Merloni, S. Heinz, and T. Di Matteo. A fundamental plane of black hole activity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 345(4):1057–1076, Nov 2003.
- [97] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*, 462:563, May 1996.
- [98] M. P. Muno, F. E. Bauer, F. K. Baganoff, R. M. Bandyopadhyay, G. C. Bower, W. N. Brandt, P. S. Broos, A. Cotera, S. S. Eikenberry, G. P. Garmire, and et al. A catalog of x-ray point sources from two megaseconds of chandra observations of the galactic center. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 181(1):110–128, Mar 2009.
- [99] T. Joseph W. Lazio and James M. Cordes. A VLA survey for compact radio sources in the galactic center. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 174(2):481–498, feb 2008.
- [100] S. Mineo, M. Gilfanov, and R. Sunyaev. X-ray emission from star-forming galaxies - i. high-mass x-ray binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(3):2095–2115, Nov 2011.
- [101] J. I. Read, G. Lake, O. Agertz, and Victor P. Debattista. Thin, thick and dark discs in Λ cdm. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 389(3):1041–1057, Sep 2008.
- [102] J. I. Read, L. Mayer, A. M. Brooks, F. Governato, and G. Lake. A dark matter disc in three cosmological simulations of milky way mass galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 397(1):44–51, Jul 2009.

- [103] E. Agol and M. Kamionkowski. X-rays from isolated black holes in the milky way. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 334(3):553–562, Aug 2002.
- [104] Tatsuya Matsumoto, Yuto Teraki, and Kunihito Ioka. Can isolated single black holes produce x-ray novae? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475(1):1251–1260, Dec 2017.
- [105] David H. Lyth and Andrew R. Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. 2009.
- [106] Tomohiro Nakama and Teruaki Suyama. Primordial black holes as a novel probe of primordial gravitational waves. *Physical Review D*, 92(12), Dec 2015.
- [107] Tomohiro Nakama and Teruaki Suyama. Primordial black holes as a novel probe of primordial gravitational waves. ii. detailed analysis. *Physical Review D*, 94(4), Aug 2016.
- [108] Kishore N. Ananda, Chris Clarkson, and David Wands. Cosmological gravitational wave background from primordial density perturbations. *Physical Review D*, 75(12), Jun 2007.
- [109] Daniel Baumann, Paul Steinhardt, Keitaro Takahashi, and Kiyotomo Ichiki. Gravitational wave spectrum induced by primordial scalar perturbations. *Physical Review D*, 76(8), Oct 2007.
- [110] Ryo Saito and Jun’ichi Yokoyama. Gravitational-wave background as a probe of the primordial black-hole abundance. *Phys. Rev. Lett.*, 102:161101, Apr 2009.
- [111] George Hobbs and Shi Dai. Gravitational wave research using pulsar timing arrays. *National Science Review*, 4(5):707–717, Sep 2017.
- [112] S. Detweiler. Pulsar timing measurements and the search for gravitational waves. , 234:1100–1104, Dec 1979.
- [113] R. W. Hellings and G. S. Downs. Upper limits on the isotopic gravitational radiation background from pulsar timing analysis. , 265:L39–L42, Feb 1983.
- [114] R. N. Manchester, G. Hobbs, M. Bailes, W. A. Coles, W. van Straten, M. J. Keith, R. M. Shannon, N. D. R. Bhat, A. Brown, S. G. Burke-Spolaor, and et al. The parkes pulsar timing array project. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 30, 2013.
- [115] M A McLaughlin. The north american nanohertz observatory for gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 30(22):224008, Nov 2013.
- [116] Michael Kramer and David J. Champion. The European Pulsar Timing Array and the Large European Array for Pulsars. *Classical and Quantum Gravity*, 30(22):224009, Nov 2013.
- [117] Keisuke Inomata, Masahiro Kawasaki, Kyohei Mukaida, Yuichiro Tada, and Tsutomu T. Yanagida. Inflationary primordial black holes for the ligo gravitational wave events and pulsar timing array experiments. *Physical Review D*, 95(12), Jun 2017.

- [118] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John A. Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- [119] R. Saito and J. Yokoyama. Gravitational-wave constraints on the abundance of primordial black holes. *Progress of Theoretical Physics*, 123(5):867–886, May 2010.
- [120] B. J. Carr and James E. Lidsey. Primordial black holes and generalized constraints on chaotic inflation. , 48(2):543–553, Jul 1993.
- [121] B. J. Carr, J. H. Gilbert, and James E. Lidsey. Black hole relics and inflation: Limits on blue perturbation spectra. *Physical Review D*, 50(8):4853–4867, Oct 1994.
- [122] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. 2003.
- [123] Jens Chluba, Adrienne L. Erickcek, and Ido Ben-Dayan. Probing the inflaton: Small-scale power spectrum constraints from measurements of the cosmic microwave background energy spectrum. *The Astrophysical Journal*, 758(2):76, Sep 2012.
- [124] Kazunori Kohri, Tomohiro Nakama, and Teruaki Suyama. Testing scenarios of primordial black holes being the seeds of supermassive black holes by ultracompact minihalos and cmb μ distortions. *Physical Review D*, 90(8), Oct 2014.
- [125] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. ShaFer, and E. L. Wright. The cosmic microwave background spectrum from the full coBE FIRAS data set. *The Astrophysical Journal*, 473(2):576, 1996.
- [126] Masahiro Kawasaki, Alexander Kusenko, and Tsutomu T. Yanagida. Primordial seeds of supermassive black holes. *Physics Letters B*, 711(1):1–5, May 2012.
- [127] Donghui Jeong, Josef Pradler, Jens Chluba, and Marc Kamionkowski. Silk damping at a redshift of a billion: New limit on small-scale adiabatic perturbations. *Physical Review Letters*, 113(6), Aug 2014.
- [128] Subir Sarkar. Measuring the baryon content of the universe: Bbn vs cmb, 2002.
- [129] Tomohiro Nakama, Teruaki Suyama, and Jun’ichi Yokoyama. Reheating the universe once more: The dissipation of acoustic waves as a novel probe of primordial inhomogeneities on even smaller scales. *Physical Review Letters*, 113(6), Aug 2014.
- [130] Gary Steigman and Kenneth M. Nollett. Light wimps, equivalent neutrinos, bbn, and the cmb, 2014.
- [131] D. R. Lorimer, M. Bailes, M. A. McLaughlin, D. J. Narkevic, and F. Crawford. A bright millisecond radio burst of extragalactic origin. *Science*, 318(5851):777–780, Nov 2007.
- [132] J. M. Cordes and T. J. W. Lazio. Ne2001.i. a new model for the galactic distribution of free electrons and its fluctuations, 2002.
- [133] Julian B. Muñoz, Ely D. Kovetz, Liang Dai, and Marc Kamionkowski. Lensing of fast radio bursts as a probe of compact dark matter. *Physical Review Letters*, 117(9), Aug 2016.
- [134] Katelin Schutz and Adrian Liu. Pulsar timing can constrain primordial black holes in the ligo mass window. *Physical Review D*, 95(2), Jan 2017.

- [135] Piero Madau, Avery Meiksin, and Martin J. Rees. 21 centimeter tomography of the intergalactic medium at high redshift. *The Astrophysical Journal*, 475(2):429–444, Feb 1997.
- [136] Hiroyuki Tashiro and Naoshi Sugiyama. The effect of primordial black holes on 21-cm fluctuations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435(4):3001–3008, Sep 2013.
- [137] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. , 142:419–421, Jul 1965.
- [138] G. Gamow. Expanding universe and the origin of elements. *Phys. Rev.*, 70:572–573, Oct 1946.
- [139] G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, J. Aymon, C. Backus, G. de Amici, K. Galuk, P. D. Jackson, P. Keegstra, L. Rokke, L. Tenorio, S. Torres, S. Gulkis, M. G. Hauser, M. A. Janssen, J. C. Mather, R. Weiss, D. T. Wilkinson, E. L. Wright, N. W. Boggess, E. S. Cheng, T. Kelsall, P. Lubin, S. Meyer, S. H. Moseley, T. L. Murdock, R. A. Shafer, and R. F. Silverberg. Preliminary Results from the COBE Differential Microwave Radiometers: Large Angular Scale Isotropy of the Cosmic Microwave Background. , 371:L1, Apr 1991.
- [140] C. H. Lineweaver, L. Tenorio, G. F. Smoot, P. Keegstra, A. J. Banday, and P. Lubin. The dipole observed in the coBE dmr 4 year data. *The Astrophysical Journal*, 470:38, Oct 1996.
- [141] Y. B. Zeldovich and R. A. Sunyaev. The Interaction of Matter and Radiation in a Hot-Model Universe. , 4:301–316, July 1969.
- [142] R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich. The Observations of Relic Radiation as a Test of the Nature of X-Ray Radiation from the Clusters of Galaxies. *Comments on Astrophysics and Space Physics*, 4:173, November 1972.
- [143] Yu. N. Pariiskii. Detection of Hot Gas in the Coma Cluster of Galaxies. , 16:1048, Jun 1973.
- [144] R. A. Sunyaev and Ia. B. Zeldovich. Microwave background radiation as a probe of the contemporary structure and history of the universe. , 18:537–560, Jan 1980.
- [145] A. S. Kompaneets. The Establishment of Thermal Equilibrium between Quanta and Electrons. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 4(5):730–737, May 1957.
- [146] R. A. Sunyaev and Ia. B. Zeldovich. The velocity of clusters of galaxies relative to the microwave background - The possibility of its measurement. , 190:413–420, Feb 1980.
- [147] J. P. Ostriker and E. T. Vishniac. Generation of Microwave Background Fluctuations from Nonlinear Perturbations at the ERA of Galaxy Formation. , 306:L51, Jul 1986.
- [148] Ethan T. Vishniac. Reionization and Small-Scale Fluctuations in the Microwave Back-

- ground. , 322:597, Nov 1987.
- [149] Scott Dodelson and Jay M. Jubas. Reionization and Its Imprint on the Cosmic Microwave Background. , 439:503, Feb 1995.
- [150] Andrew H. Jaffe and Marc Kamionkowski. Calculation of the ostriker-vishniac effect in cold dark matter models. *Physical Review D*, 58(4), Jul 1998.
- [151] Wayne Hu, Douglas Scott, and Joseph Silk. Reionization and cosmic microwave background distortions: A complete treatment of second-order compton scattering. *Phys. Rev. D*, 49:648–670, Jan 1994.
- [152] José Luis Bernal, Alvise Raccanelli, Licia Verde, and Joseph Silk. Signatures of primordial black holes as seeds of supermassive black holes. *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, 2018:017, May 2018.
- [153] D. Giannios, N. D. Kylafis, and D. Psaltis. Spectra and time variability of Galactic black-hole X-ray sources in the low/hard state. , 425:163–169, October 2004.
- [154] M. Fukugita and M. Kawasaki. Reionization during Hierarchical Clustering in a Universe Dominated by Cold Dark Matter. , 269:563, August 1994.
- [155] J. M. Shull and M. E. van Steenberg. X-ray secondary heating and ionization in quasar emission-line clouds. , 298:268–274, Nov 1985.
- [156] Mark Dijkstra, Zoltan Haiman, and Abraham Loeb. A limit from the x - ray background on the contribution of quasars to reionization. *The Astrophysical Journal*, 613(2):646–654, Oct 2004.
- [157] E. Komatsu and T. Kitayama. Sunyaev-Zeldovich Fluctuations from Spatial Correlations between Clusters of Galaxies. , 526:L1–L4, November 1999.
- [158] Uroš Seljak. Analytic model for galaxy and dark matter clustering. , 318:203–213, October 2000.
- [159] Nick Kaiser. Weak Gravitational Lensing of Distant Galaxies. , 388:272, Apr 1992.
- [160] Chung-Pei Ma and J. N. Fry. Nonlinear Kinetic Sunyaev-Zeldovich Effect. , 88(21):211301, May 2002.
- [161] Mário G. Santos, Asantha Cooray, Zoltán Haiman, Lloyd Knox, and Chung-Pei Ma. Small-Scale Cosmic Microwave Background Temperature and Polarization Anisotropies Due to Patchy Reionization. , 598(2):756–766, Dec 2003.
- [162] Matthew McQuinn, Steven R. Furlanetto, Lars Hernquist, Oliver Zahn, and Matias Zaldarriaga. The Kinetic Sunyaev-Zel’dovich Effect from Reionization. , 630(2):643–656, Sep 2005.
- [163] Wayne Hu. Reionization Revisited: Secondary Cosmic Microwave Background Anisotropies and Polarization. , 529(1):12–25, Jan 2000.
- [164] R. Chown, Y. Omori, K. Aylor, B. A. Benson, L. E. Bleem, and et al. Maps of the Southern Millimeter-wave Sky from Combined 2500 deg² SPT-SZ and Planck Temperature

- Data. , 239:10, November 2018.
- [165] Planck Collaboration, Y. Akrami, and et al. Planck 2018 results. i. overview and the cosmological legacy of planck, 2018.
- [166] Asantha Cooray and Ravi Sheth. Halo models of large scale structure. , 372(1):1–129, Dec 2002.
- [167] 松原隆彦. 東京大学出版会, 2010.
- [168] 内山龍雄. 一般相对性理論. 裳華房, 1978.

Appendix

付録 A: Halo Formalism

この章では、A.Cooray & R.Sheth 2002 の論文 [166] にてまとめられている”halo formalism”について紹介する。これは第 6 章で紹介した我々の研究にて、PBH の y パラメータや電離構造に関する 2 点相関関数及びパワースペクトルを見積もる際に利用した。

The two-point correlation function (density)

この手法において、全ての質量は、質量分布と密度構造を持つ複数のハローに重力的に束縛されていると考える。それゆえ、座標 \mathbf{x} での密度は宇宙に存在する全てのハローからの寄与の足し合わせで求めることができ、

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) &= \sum_i f_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \sum_i \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i) = \sum_i m_i u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i) \\ &= \sum_i \int dm d^3x' \delta(m - m_i) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) m u(\mathbf{x} - \mathbf{x}' | m),\end{aligned}\tag{A,1}$$

と書き表すことができる。ここで、 f_i は i 番とラベリングされた、中心が \mathbf{x}_i にあるハローの密度プロファイルである。2 番目の等号は、密度がハローの質量と 1 対 1 対応している仮定からきている。3 番目の等号は、 $\int d^3x' u(\mathbf{x} - \mathbf{x}' | m) = 1$ のように規格化されたプロファイルを用いて密度の分布を定義していることからきている。

厳密にいうと、式 (A,1) 中の密度 $\rho(\mathbf{x})$ は、我々が一般的に考える密度ではなく、密度のゆらぎ部分 $\Delta\rho(\mathbf{x})$ に対応している。実際、式 (A,1) を用いると、 $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ の極限において、密度 $\rho(\mathbf{x})$ が $\rho(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ のように振舞っている。つまり、 $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ の極限において $\rho(\mathbf{x}) \rightarrow \rho_{\text{BG}}$ のようになっていない。

質量 m のハローの数密度 $n(m)$ は

$$\langle \sum_i \delta(m - m_i) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) \rangle \equiv n(m),\tag{A,2}$$

で定義される。ここで、 $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す。

ここで、少し寄り道をして突然現れた上式 (A,2) が成り立つのかどうかを見ていこう。式 (A,2)

の右辺は

$$n(M) = \frac{d\tilde{n}(M)}{dM}, \quad (\text{A,3})$$

と書き直すことができる。ここで $\tilde{n}(M)$ はハローの数密度である。よって

$$\int_A dV \int dM n(M) = \int_A dV \tilde{n}(M) = N_{\text{halo}}, \quad (\text{A,4})$$

と書き表すことができる。ここで N_{halo} は領域 A 内に存在するハローの数である。

かたや、式 (A,2) の左辺も

$$\int_A dV \int dM \langle \Sigma_i \delta(m - m_i) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) \rangle = \langle \Sigma_i \rangle = N, \quad (\text{A,5})$$

と書き直すことができる。ここで N は \mathbf{x}_i にある質量 m_i ($i = 1, 2, \dots, N$) のハローを数え上げた数のアンサンブル平均である。よって確かに式 (A,2) の左辺と右辺は一致していることがわかる。つまりは、 $N = N_{\text{halo}}$ になっている。

話は本題に戻り、次は平均密度を考える。平均密度は

$$\begin{aligned} \bar{\rho} = \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle &= \langle \Sigma_i m_i u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | m_i) \rangle = \langle \Sigma_i \delta(m - m_i) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) m u(\mathbf{x} - \mathbf{x}' | m) \rangle \\ &= \int dm n(m) m \int d^3 \mathbf{x}' u(\mathbf{x} - \mathbf{x}' | m) = \int dm n(m) m, \end{aligned} \quad (\text{A,6})$$

のように書くことができる。ここでアンサンブル平均をハローの質量関数平均 $n(m)$ と空間平均に書き直した。また、 $n(m)$ 自体がハローの質量関数平均になっていることにも注意する。

ここで、2点相関関数は

$$\zeta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \zeta^{1h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \zeta^{2h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{A,7})$$

と書き下すことができ、 ζ^{1h} 、 ζ^{2h} の項はそれぞれ

$$\zeta^{1h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int dm \frac{m^2 n(m)}{\bar{\rho}^2} \int d^3 \mathbf{y} u(\mathbf{y} | m) u(\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{x}' | m), \quad (\text{A,8})$$

$$\begin{aligned} \zeta^{2h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \int dm_1 \frac{m_1 n(m_1)}{\bar{\rho}} \int dm_2 \frac{m_2 n(m_2)}{\bar{\rho}} \int d^3 \mathbf{x}_1 u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 | m_1) \\ &\quad \times \int d^3 \mathbf{x}_2 u(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2 | m_2) \zeta_{hh}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 | m_1, m_2), \end{aligned} \quad (\text{A,9})$$

となっている。式 (A,8) は同一のハローから来る密度の二点相関である。この項のことを、Poisson term、もしくは1-halo 項と呼ぶ。式 (A,9) は2つの異なるハローから来る寄与である。この項のことを、Cluster term もしくは、2-halo 項と呼ぶ。

2つの項は共に計算する際、ハローの分布や質量ごとの密度プロファイルを知っている必要がある。また、2-halo 項に関してはさらに、 m_1 と m_2 の質量のハローに関する2点相関関数、 $\zeta_{hh}(r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| | m_1, m_2)$ についても知っている必要がある。

1-halo 項に関しては、比較的簡単に計算できる。質量 m のハローの規格化された密度構造、 $u(r|m)$ の関数を2つ掛け合わせて積分するだけである。

かたや、2-halo 項はより複雑になっている。もし u_1 と u_2 がとても鋭いピークを持つ構造になっていた場合、デルタ関数に置き換えることができる。そうすると、 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 における積分を実行でき、 $\zeta_{hh}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'|m_1, m_2)$ という項が現れる。 u_1 と u_2 をデルタ関数に置き換えるという操作は、ハローの典型的なサイズよりも外側で構造がほとんど変わらないのならば妥当な近似であるといえる。また、(本研究では、バイアスは無視したが、) バイアスを用いることで、バイアスが効いているスケールにおいて $\zeta_{hh}(r|m_1, m_2)$ は、

$$\zeta_{hh}(r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||m_1, m_2) \sim b(m_1)b(m_2)\zeta(r), \quad (\text{A},10)$$

と見積もることができる。典型的なハローのサイズよりも大きなスケールにて 2 点相関を見ている場合、 $\zeta(r) \approx \zeta_{\text{lin}}(r)$ と近似することができる。ここで $\zeta_{\text{lin}}(r)$ は線形理論における 2 点相関関数である。

2 点相関関数は 2 つの関数の畳み込みを含んでいたの、フーリエ空間で考えるとわかりやすい。実空間密度構造の畳み込みはハローの構造のフーリエ変換の単純な積でかける。それゆえ、ハロー分布のパワースペクトルは、

$$P(K) = P^{1h}(k) + P^{2h}(k), \quad (\text{A},11)$$

となり、ここで P^{1h} と P^{2h} は

$$P^{1h}(k) = \int dm n(m) \left(\frac{m}{\bar{\rho}} \right)^2 |u(k|m)|^2, \quad (\text{A},12)$$

$$P^{2h}(k) = \int dm_1 n(m_1) \left(\frac{m_1}{\bar{\rho}} \right) u(k|m_1) \int dm_2 n(m_2) \left(\frac{m_2}{\bar{\rho}} \right) u(k|m_2) P_{hh}(k|m_1, m_2), \quad (\text{A},13)$$

であり、 $u(k|m)$ は $u(\mathbf{x} - \mathbf{x}'|m)$ のフーリエ変換である。式 (A,10) より、ハローハロー相関のパワースペクトルは

$$P_{hh}(k|m_1, m_2) \approx b(m_1)b(m_2)P^{\text{lin}}(k), \quad (\text{A},14)$$

とおおよそ見積もることができる。

最後に、規格化された密度構造 $u(r|m)$ をフーリエ変換した関数 $\tilde{u}(k|m)$ を書いておく。 $\tilde{u}(k|m)$ は

$$u(k|m) = \frac{\int dr r^2 \rho(r|m) \sin(kr)/(kr)}{\int dr r^2 \rho(r|m)} = \frac{1 - e^{kr_s}}{kr_s}, \quad (\text{A},15)$$

である。ここで r_s は構造のコア半径である。 $\tilde{u}(k|m)$ は、大きな k 、つまり小スケールで $1/k$ に比例して小さくなっていく関数である。

The two-point correlation function (ionization fraction)

我々の研究の第 6 章にて使うため、上記の議論と同様の手順にて、PBH による電離度 δ_{x_e} における 2 点相関関数、及びパワースペクトルも導出しておく。

先ほどと同様に考えると電離度は,

$$\begin{aligned}\delta_{x_e}(\mathbf{x}) &= \Sigma_i \delta_{x_e}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i | L_i) \\ &= \Sigma_i \int dL d^3 x' \delta(L - L_i) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) \delta_{x_e}(\mathbf{x} - \mathbf{x}' | L),\end{aligned}\tag{A,16}$$

と記述することができる. この電離度は一般の電離度 x_e ではなく背景電離度を差し引いた電離度を表していることは再度忠告しておこう. 式 (A,16) 中の L は光度である. ここでは, 特に違いはないが, 質量ではなく光度によってラベリングしている.

光度 L の PBH の数密度は,

$$n(L) = \langle \Sigma_i \delta(L - L_i) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) \rangle,\tag{A,17}$$

で与えられる.

以上より, PBH による電離度に関する 2 点相関関数は

$$\zeta_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}} = \zeta_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{1h} + \zeta_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{2h},\tag{A,18}$$

であり, 各項はそれぞれ

$$\zeta_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{1h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int n(L) \frac{1}{\bar{x}_e^2} \int d^3 \mathbf{y} \delta_{x_e}(\mathbf{y} | L) \delta_{x_e}(\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{x}' | L),\tag{A,19}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{2h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \int dL_1 n(L_1) \frac{1}{\bar{x}_e} \int dL_2 n(L_2) \frac{1}{\bar{x}_e} \\ &\quad \times \int d^3 \mathbf{x}_1 \delta_{x_e}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 | L_1) \int d^3 \mathbf{x}_2 \delta_{x_e}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2 | L_2) \zeta_{pbh, pbh}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2 | L_1, L_2),\end{aligned}\tag{A,20}$$

で与えられる.

よって各項に対応するパワースペクトルは

$$P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{1h}(k) = \int dL n(L) \frac{1}{\bar{x}_e^2} |\tilde{\delta}_{x_e}(k | L)|^2,\tag{A,21}$$

$$\begin{aligned}P_{\delta_{x_e} \delta_{x_e}}^{2h}(k) &= \int dL_1 n(L_1) \frac{1}{\bar{x}_e} |\delta_{x_e}(k | L_1)| \\ &\quad \times \int dL_2 n(L_2) \frac{1}{\bar{x}_e} |\tilde{\delta}_{x_e}(k | L_2)| P_{pbh, pbh}(k | L_1, L_2)\end{aligned}\tag{A,22}$$

である. 式中の電離度のフーリエ変換 $\tilde{\delta}_{x_e}(k | L)$ は,

$$\tilde{\delta}_{x_e}(k | L) = \int r^2 dr \sin(kr) / kr \sim R_s^3,\tag{A,23}$$

で与えられる. ここで, R_s はストロムグレン半径であり,

$$R_s = \left(\frac{N_\gamma}{n_p n_e} \right)^{1/3} \propto (1+z)^{-2}\tag{A,24}$$

で与えられる. (詳しくは, 付録 B を参照せよ.)

付録 B: Astrophysics

ここでは，第 6 章にて用いた冷却率とストロムグレン半径について紹介する．

Cooling rate

本研究にて考慮した冷却率は，再結合冷却，衝突電離冷却，衝突励起冷却，そしてコンプトン冷却の 4 つである．それぞれの表式は以下の通りである [154]．ここでは，次元がわかりやすいように光速 c やプランク定数 h をあらわに書いている．

- 再結合冷却:

$$\alpha_{\text{HM}} = 6.28 \times 10^{-11} T^{-1/2} \left(\frac{T}{10^3} \right)^{-0.2} \left[1 + \left(\frac{T}{10^5} \right)^{0.7} \right]^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}. \quad (\text{B},1)$$

- 衝突電離冷却:

$$\zeta_{\text{HI}} = 1.27 \times 10^{-21} T^{1/2} \left[1 + \left(\frac{T}{10^5} \right)^{1/2} \right]^{-1} \exp(-1.58 \times 10^5/T) \text{ erg cm}^3 \text{ sec}^{-1} \quad (\text{B},2)$$

- 衝突励起冷却:

$$\psi_{\text{HI}} = 7.5 \times 10^{-19} \left[1 + \left(\frac{T}{10^5} \right)^{1/2} \right]^{-1} \exp(-1.18 \times 10^5/T) \text{ erg cm}^3 \text{ sec}^{-1}. \quad (\text{B},3)$$

- コンプトン冷却

$$\lambda_c = 4k(T - T_{\text{CMB}}) \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right) n_e \sigma_{\text{T}} c. \quad (\text{B},4)$$

Stömgren radius

ストロムグレン半径 R_s とは，放射を放出するとある天体を中心として電離平衡状態となっている球状の領域の半径である．実際には密度ゆらぎが存在するため，ほとんどの場合完全な球形にはならないが，HII 領域の典型的な大きさを表す指標になる．単位時間あたりに中心天体から放出される光子数と電子と陽子の再結合率の釣り合いから計算される．

$$\int_0^{R_s} 4\pi r^2 dr n_e n_p \alpha_B(T) = \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu \frac{L_\nu}{h\nu}, \quad (\text{B},5)$$

ここで， α_B は式 (6.1,7) と同様，ケース B の再結合率である．式 (B,5) を解くことで，ストロムグレン半径は単位時間あたりに天体から放出される光子数 N_γ を用いて，

$$R_s = \left(\frac{3N_\gamma}{4\pi n_e n_p \alpha_B} \right)^{1/3}, \quad (\text{B},6)$$

と書くことができる。これは式 (6.1,12) と同じ式である。ストロムグレン半径の内側はほぼ完全に電離していると考えることができる。また、このストロムグレン半径の内部の球状電離領域のことを電離バブルと呼ぶ場合がある。

付録 C: Jeans instability

第 3 章にて登場した，密度の重力不安定成長を記述する上で重要なパラメータである Jeans 長を導出しておく．以下の計算は文献 [167] を参考に行っている．

用いる基本方程式は下記の 3 つである．

- 連続の式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{C},1)$$

- 運動方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \phi, \quad (\text{C},2)$$

- ポアソン方程式:

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho. \quad (\text{C},3)$$

ここで， ρ は密度， \mathbf{v} はガスの速度， P はガス圧力， ϕ は重力ポテンシャルを表している．上記の 3 つの方程式は，宇宙の膨張の効果を考慮していない静止座標系で表されたものなので，これを膨張時空の座標系 $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$ によって書き直すことを考える．ただし a はスケール因子である．

まず，上記の速度場は静止座標系から見た速度を表しているが，膨張宇宙では共動座標から見た速度を速度場とみなす必要がある．そこで物質の移動に伴う静止座標系の値の時間変化を考えると，

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{a} \mathbf{x} + a \dot{\mathbf{x}}, \quad (\text{C},4)$$

となる．右辺第一項は，共同座標系で静止している物質が静止座標で見た時に運動して見える効果を表している．したがって共同座標の速度場においてはこの寄与を差し引いた $a \dot{\mathbf{x}}$ を速度とみなすべきであり，そのためには

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \dot{a} \mathbf{x}, \quad (\text{C},5)$$

と置き換えれば良い．さらに座標変換 $(t, \mathbf{r}) \rightarrow (t, \mathbf{x})$ を行うことにより固定する変数が変わるので，偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{x} \cdot \nabla, \quad \nabla \rightarrow \frac{1}{a} \nabla, \quad (\text{C},6)$$

と置き換えられる．ここで右辺の空間微分は共動座標によるもので $\nabla = \partial/\partial \mathbf{x}$ である．これらの変換を上記の 3 式 (C,1), (C,2) に適用すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{C},7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{a \rho} - \nabla \Phi, \quad (\text{C},8)$$

ただし，ここで共動座標の重力ポテンシャル Φ を

$$\Phi \equiv \phi + \frac{1}{2} a \ddot{a} |\mathbf{x}|^2, \quad (\text{C},9)$$

で定義した。第二項は、静止座標と共動座標が原点以外で互いに加速度運動していることに対応して付け加わるものである。共動的に膨張する物質は共同座標では力を受けていないが、静止座標では加速運動するので見かけの力が加わるのである。

さて、上に導いた方程式を解くためには重力ポテンシャルを与える必要がある。重力場には宇宙全体のエネルギー成分が全て寄与する。ここでは宇宙の支配的なエネルギー成分も非相対論的物質である場合を考え、その全質量密度を ρ_{tot} とする。この時の重力ポテンシャルは静止座標における次のポアソン方程式

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho_{\text{tot}}, \quad (\text{C},10)$$

により定まる。ここで $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ は静止座標のラプラシアンである。

非相対論的物質が支配的な宇宙において、空間平均した宇宙の全質量密度を $\bar{\rho}_{\text{tot}}$ とすれば、スケール因子の2階微分は一様等方時空におけるフリードマン方程式 (2.4,2) より

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}_{\text{tot}}, \quad (\text{C},11)$$

で与えられる。

式 (C,6), (C,9), (C,10), (C,11) より共動座標系におけるポアソン方程式は

$$\Delta\Phi = 4\pi Ga^2(\rho_{\text{tot}} - \bar{\rho}_{\text{tot}}). \quad (\text{C},12)$$

となる。共動座標系でみると、宇宙の様に広がった密度は重力ポテンシャルに寄与しない。空間的一様性からのズレのみが寄与する。それに対して、静止座標においては空間に一様に分布した物質はポテンシャルを発散させてしまう。このことは、静止宇宙に物質を一様に分布させた状態が極度に不安定であることを意味している。このような観点から、静止宇宙より膨張宇宙の方が自然であるということが出来る。

ここで上の3式 (C,7), (C,8), (C,12) の密度と圧力に対してそれぞれの平均値を用いて以下のように摂動を加える。

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta), \quad (\text{C},13)$$

$$P = \bar{P} + P_1, \quad (\text{C},14)$$

式 (C,7) に関して線形0次の項のみ取り出すと

$$\frac{d}{dt}(a^3\bar{\rho}) = 0, \quad (\text{C},15)$$

が得られるのでこれを用いて3式 (C,7), (C,8), (C,12) の線形一次の項のみ取り出すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\rho}\delta + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\bar{\rho}\mathbf{v}) = 0, \quad (\text{C},16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = -\frac{\nabla P_1}{a\bar{\rho}} - \frac{1}{a}\nabla\Phi, \quad (\text{C},17)$$

$$\Delta\Phi = 4\pi a^2 G\bar{\rho}_{\text{tot}}\delta_{\text{tot}}. \quad (\text{C},18)$$

となる．ここで δ_{tot} は宇宙の全密度成分についての密度ゆらぎである．

なお，宇宙が相対論的物質優勢の場合，式 (C,11) は宇宙の全平均圧力 \bar{p}_{tot} の寄与が付け加わり，

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2} (\bar{\rho}_{\text{tot}} + 3\bar{p}_{\text{tot}}), \quad (\text{C},19)$$

で置き換えられる．しかしこれを用いると，共動座標におけるポアソン方程式 (C,12) の両辺が一樣宇宙において消えず，おかしいことになる．これは元のポアソン方程式 (C,10) が非相対論的物質に対するものだからである．

圧力が寄与する場合にも一樣宇宙で $\Phi = 0$ の解を持つためには，もとの静止座標のポアソン方程式 (C,10) が

$$\Delta\phi = \frac{4\pi G}{c^2} (\rho_{\text{tot}} + 3p_{\text{tot}}), \quad (\text{C},20)$$

であれば良い．実際，アインシュタイン方程式のニュートン極限を相対論的物質を含む場合に拡張するとこの修正されたポアソン方程式 (C,20) を示すことができる [168]．相対論的物質では圧力も重力源として作用し，重力ポテンシャルに寄与する．こうして，今考えている非相対論的物質の他に，外場として相対論的成分も重力ポテンシャルに寄与する時には共動座標のポアソン方程式 (C,18) は

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi G a^2}{c^2} (\bar{\rho}_{\text{tot}} \delta_{\text{tot}} + 3P_{1\text{tot}}), \quad (\text{C},21)$$

となる．ここで $P_{1\text{tot}}$ は全圧力のゆらぎである．この場合も，ゆらぎのない一樣な成分は重力ポテンシャルに寄与しない．特に宇宙項が空間的に一定の相対論的エネルギー成分である．このため，非相対論的なポアソン方程式 (C,18) の形は宇宙項があっても変更を受けない．

以下では簡単のため宇宙が非相対論的物質優勢の場合を考える． $(\partial/\partial t + 2\dot{a}/a) \times$ 式 (C,16) - $\bar{\rho}/a \nabla \cdot$ 式 (C,17) で速度場の項を消した上で式 (C,18) を代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\Delta P_1}{a^2 \bar{\rho}} = 4\pi G \bar{\rho}_{\text{tot}} \delta_{\text{tot}}, \quad (\text{C},22)$$

が得られる．ただし $P_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right) \bar{\rho} \delta = c_s^2 \bar{\rho} \delta$ が成り立つとした (c_s はこの流体の音速である)．

ここで他の流体成分からの全ゆらぎへの寄与が無視できる，つまり $\rho_{\text{tot}} \delta_{\text{tot}} = \bar{\rho} \delta$ である場合を考える．さらに密度ゆらぎ δ に関して

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) = \int d^2 x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}, t), \quad (\text{C},23)$$

のようにフーリエ変換すると式 (C,22) は

$$\frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} - \left(4\pi G \bar{\rho} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\right) \tilde{\delta} = 0, \quad (\text{C},24)$$

となる．

これよりこのポテンシャルの係数 $4\pi G \bar{\rho} - c_s^2 k^2/a^2$ が正であればこのゆらぎは摩擦力を受けながらも成長できるようになることがわかる．これは重力が圧力に打ち勝ってゆらぎが成長し，物質が

重力収縮をしていくことに対応する。逆に係数が負であれば δ は成長できず減衰振動しながらゼロに近づいていく。これは圧力の効果が大きく、重力による収縮力を圧力が押し返してしまいゆらぎが成長できないことに対応する。

これら2つの定性的に異なる状況を分ける臨界の波数 k_J はこの係数がちょうどゼロになる条件から

$$k_J = \frac{a\sqrt{4\pi G\bar{\rho}}}{c_s}, \quad (\text{C},25)$$

で与えられる。これを実距離の波長に直すと

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} = 2c_s \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{H}. \quad (\text{C},26)$$

に対応する。この波長を目安とする長さよりも長いスケールのゆらぎのみが成長できる。この臨界の長さ λ_J を Jeans 長と呼ぶ。

付録 D: Bessel function & Spherical Bessel function

第 6 章にて説明した私の研究で登場したベッセル関数及び球ベッセル関数を紹介しておく。

Bessel fuction

ベッセル関数は、円柱座標系における楕円型の偏微分方程式を解くために重要な特殊関数である。任意の実数 l に対してベッセルの微分方程式が以下のように与えられる。

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - l^2) y = 0. \quad (\text{D},1)$$

ここで、 l が非負の整数 ($l = 0, 1, 2, \dots$) の場合はこの式 (D,1) は 2 つの線形独立な解を持つ。

$$J_l(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+l}, \quad (\text{D},2)$$

$$N_l(x) = \lim_{\alpha \rightarrow l} \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \quad (\text{D},3)$$

式 (D,2) を第 1 種ベッセル関数、式 (D,3) を第 2 種ベッセル関数、またはノイマン関数と呼んで区別する。第 1 種ベッセル関数は $x = 0$ の近傍で収束値をとるのに対し、第 2 種ベッセル関数は $x = 0$ で発散するという振る舞いの違いがある。また、主な数学的な性質として、 l が非整数の場合の線型独立な 2 つの解は $J_l(x)$ と $J_{-l}(x)$ で与えられること、 l が整数の場合は $J_{-l}(x) = (-1)^l J_l(x)$ 及び $N_{-l}(x) = (-1)^l N_l(x)$ が成り立つことが挙げられる。第 1 種ベッセル関数と第 2 種ベッセル関数の複素線型結合も式 (D,1) の解であり、これはハンケル関数と呼ばれている。

Spherical Bessel function

ベッセル関数は、円柱座標系において楕円型の偏微分方程式を解くために有用な関数であった。一方、球ベッセル関数は極座標において楕円型の偏微分方程式を解くために有用な関数である、極座標の場合は球ベッセル微分方程式と呼ばれる関数が存在する、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right] y = 0. \quad (\text{D},4)$$

この球ベッセル微分方程式の解は、さきほどの第 1 種ベッセル関数と第 2 種ベッセル関数を用いて

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{D},5)$$

$$n_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{D},6)$$

と書くことができる。式 (D,5) を第 1 種球ベッセル関数、式 (D,6) を第 2 種球ベッセル関数、もしくは球ノイマン関数と呼ぶ。

付録 E: Others

この修士論文にて登場した記号や物理量について追記すべきと感じたものを紹介しておく。

Christoffel symbols

クリストフェル記号とは、一般曲線座標でのベクトルの微分が共変なテンソルになるような微分の仕方（共変微分）

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \quad (\text{E},1)$$

に導入された、時空間の関数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ のことである。共変ベクトルの座標変換

$$\tilde{A}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} A_\mu \quad (\text{E},2)$$

(c.f. 反変ベクトルの座標変換)

$$\tilde{A}^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu \quad (\text{E},3)$$

と共変ベクトルの微分変換式

$$\tilde{\partial}_\nu \tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\alpha(x) \right) = \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial A_\alpha(x)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} A_\alpha(x) \quad (\text{E},4)$$

を用いて、共変微分 (E,1) をテンソルにし、さらに一般曲線座標 x^μ における局所慣性座標 \tilde{x}^α におけるクリストフェル記号がゼロに帰着すると言う条件を課すとクリストフェル記号は

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha} \quad (\text{E},5)$$

で与えられる。

ここで、一般の計量テンソルとミンコフスキー計量テンソル間には以下の二つの変換式が成り立つ。

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{E},6)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\mu\nu} \quad (\text{E},7)$$

一つ目の変換式 (E,6) を x^λ で微分し, その後二つ目の変換式 (E,7) と式 (E,5) を代入すると

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu,\lambda} &= \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right) \eta_{\alpha\beta} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right) \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\gamma\rho} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\mu} \right) g_{\gamma\rho} \\
&= (\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma \delta_\nu^\rho + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \delta_\mu^\gamma) g_{\gamma\rho} \\
&= g_{\gamma\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma + g_{\mu\rho} \Gamma_{\lambda\nu}^\rho
\end{aligned} \tag{E,8}$$

この関係から,

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} &= (g_{\gamma\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma + g_{\mu\rho} \Gamma_{\lambda\nu}^\rho) + (g_{\gamma\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\gamma + g_{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - (g_{\gamma\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\gamma + g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho) \\
&= 2g_{\gamma\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\gamma
\end{aligned} \tag{E,9}$$

ここで, 二つ目の等号には式 (E,5) から伺える 2 つの下付き添字の対称性を用いた. 式 (E,9) より

$$g_{\gamma\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\gamma = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}) \tag{E,10}$$

ここで $g_{\gamma\nu} g^{\gamma\nu} = 1$ の関係性を用いて, さらに添字を整理すると

$$\Leftrightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu}) \tag{E,11}$$

のように表せる.

Stress Energy Tensor

エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ とは, 座標値 x^ν 一定の微小 3 次元空間 (4 次元的な意味あいを持たせて微小 3 次元面とも言われる) を通過する運動量 P^μ の流束のことである. つまり, 00 成分 T^{00} とは, x^0 一定の微小 3 次元空間を通過する P^0 の流束のことである. ここで x^0 一定の微小 3 次元空間とは, 普通の空間的な 3 次元微小体積のことである. また, P^0 とは普通のエネルギーのことであるから, 結局のところ T^{00} とは, 空間的な単位体積のエネルギー量, つまりエネルギー密度を表している.

次に, $0i$ 成分 T^{0i} について. 上記の定義に基づくと, これは x^i 一定の微小 3 次元空間を通過する運動量 p^0 となる. x^i 一定の微小 3 次元空間とは, ある x^i 軸上に垂直な空間的な 2 次元面と時間軸で張られる 3 次元時空間のことである. したがって, T^{0i} とは, 単位時間, 単位面積あたりのエネルギー量であり, これはエネルギー流束と呼ばれる. さらに, $i0$ 成分 T^{i0} は, 同様に考えると単位体積あたりの空間的な運動量の i 成分 P^i , つまり運動量 i 成分の密度ということになる. 最後に, ij 成分 T^{ij} について. これまでの解釈より, これは単位時間, x^j 軸状の単位面積あたりの空間的な運動量の i 成分, つまり x^j 軸状に垂直な仮想的な面に働く力の i 成分であると言える. これは応力テンソルと呼ばれる.

局所ミンコフスキー空間の場合の T^{00} は上記の通りエネルギー密度であるので、1粒子あたりのエネルギー P^0 を分布関数で平均した量と考えることができ、以下のように与えられる。

$$T^{00}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^0 f(x, P). \quad (\text{E},12)$$

また、 T^{0i} に関しては、 x^i 軸状に単位時間、単位面積あたりに横切るエネルギーの流れであったので

$$T^{0i}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^0 v^i f(x, P), \quad (\text{E},13)$$

となる。 T^{i0} に関しては T^{00} 同様に考えて、1粒子あたりの運動量 i 成分 P^i を分布関数で平均した量と考えることができ

$$T^{i0}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^i f(x, P), \quad (\text{E},14)$$

とあたえられる。最後に T^{ij} に関しては、 T^{i0} と同様に考えて、 x^j 軸状に単位時間、単位面積あたりに横切る運動量 i 成分 P^i の流れと考え、

$$T^{ij}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^i v^j f(x, P), \quad (\text{E},15)$$

で与えられる。エネルギー運動量テンソルは、簡単な形にまとめられるかと考えると実は可能で実際、

$$T^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3 P^0} P^\mu P^\nu f(x, P), \quad (\text{E},16)$$

という式にまとめられる。この式 (E,16) は局所ミンコフスキー時空における、エネルギー運動量テンソルの表式である。これを、一般の座標に置き換えることによって

$$T^{\mu\nu}(x) = 2 \int d\Pi P^\mu P^\nu f(x, P), \quad (\text{E},17)$$

という表式が得られる。ここで $d\Pi$ は運動量空間の物理的な3次元不変運動量要素と呼ばれ、

$$d\Pi = \frac{\sqrt{-g} d^4P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P_\mu P^\mu + m^2), \quad (\text{E},18)$$

と定義される量である。ただし、 Θ は単位ステップ関数と呼ばれる階段関数である。

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \quad (\text{E},19)$$